

**"SOBRE LA TEORIA DE MORSE Y EL METODO DE WITTEN"**

**ALVARO RIASCOS VILLEGAS**

**UNIVERSIDAD DE LOS ANDES  
FACULTAD DE CIENCIAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS  
BOGOTA, AGOSTO DE 1992**

## CONTENIDO

	Página
INTRODUCCION	1
I. CAPITULO I. LA TEORIA DE MORSE	
1.1 Definiciones y Lemas	3
1.2 Tipo de Homotopía en Términos de Valores Críticos	14
1.3 CW-Complejos	23
1.4 CW-Complejos y Puntos Críticos	26
1.5 Homología de un CW-Complejo	31
1.6 Desigualdades de Morse	34
1.7 Existencia de Funciones de Morse	38
II. CAPITULO II. LA TEORIA DE WITTEN	
2.1 Los Teoremas de De Rham y Hodge	45
2.2 La Diferencial y El Laplaciano de Witten	49
2.3 El Oscilador Armónico y El Espectro del Laplaciano	53
2.4 El Teorema de Localización	56
REFERENCIAS	59
SIMBOLOS	61
APENDICE I. FORMAS BILINEALES	62
APENDICE II. VARIEDADES COCIENTES	64
APENDICE III. GEOMETRIA RIEMANNIANA	71
APENDICE IV. SOBRE EL TEOREMA 1.4.4	75

Estoy enamorado de cuanto crece al aire libre,  
De los hombres que viven junto al ganado o sienten  
el sabor del Océano y de los bosques  
de quienes arman o conducen los barcos, de quienes  
manejan las hachas o guían los caballos...

La madre selva en la ventana me satisface más  
que la metafísica de los libros.

Walt Whitman  
Canto de mí mismo

## INTRODUCCION

El objetivo de esta monografía es exponer los aspectos fundamentales de la Teoría de Marston Morse y algunas ideas recientes, debidas al físico americano Edward Witten, para demostrar uno de los resultados más importantes de dicha teoría.

La teoría de Morse fue desarrollada por éste entre 1925 y 1934 en una serie de artículos, cuyos resultados recogió en su libro "The Calculus of Variations in the Large" publicado en 1934. Originalmente Morse aplicó sus resultados al estudio de algunos problemas variacionales, pero más tarde ésta resultaría una técnica muy fructífera para estudiar problemas de Topología Diferencial. Uno de los resultados fundamentales de la Teoría, son las famosas desigualdades de Morse, que establecen una relación entre los puntos críticos de una función real definida sobre una variedad diferenciable, y los grupos de homología de ésta. En general, como se verá a lo largo del capítulo uno, los puntos críticos de una función real definida sobre una variedad, y su Hessiana, nos dan mucha información sobre la topología de la variedad. Un ejemplo sencillo y muy bonito es el que aparece en la introducción del libro de John Milnor, "Morse Theory", publicado en 1963 ([Mil]).

En 1982 Witten publica un artículo titulado "Supersymmetry and Morse Theory" [Witt], donde resalta las profundas relaciones entre la física moderna, particularmente la Teoría de Campos y la Geometría Diferencial. Entre otras cosas, las primeras secciones de este artículo, presentan una demostración puramente analítica de las Desigualdades de Morse, utilizando algunas ideas bien conocidas en física.

En términos generales, esta monografía sigue la organización, y desarrolla más extensamente la breve introducción a la Teoría de Morse y las ideas de Witten, que aparecen en las notas de Elmer Rees, "Introduction to Morse Theory" ([Ree]).

El primer capítulo de la monografía se dedica a la Teoría de Morse hasta obtener las desigualdades. Aquí básicamente sigo la exposición que aparece en el libro de Milnor, que difiere sustancialmente de la presentación original de Morse, y desarrollamos algunos ejemplos propuestos en las notas de Rees. En contraste con la demostración de Witten de las desigualdades de Morse, la prueba que aparece en Milnor es fundamentalmente geométrica.

El capítulo dos se dedica al método de Witten donde sigo las notas de Rees. En los últimos años las ideas de Witten han sido muy influyentes en el estudio de la Topología y Geometría de las variedades.

Finalmente quisiera terminar con algunas palabras de agradecimiento. A María, mil gracias por su trabajo de mecanografía. A mi Director de Tesis, Jaime Lesmes, por su invaluable apoyo durante toda la carrera. A Xavier Caicedo, por todo lo que me enseñó. Y a mi hermano Jaime, por los cinco años que hemos compartido; ojalá sean muchos más.

Por último, quisiera dedicar este trabajo a mi madre, con todo el cariño que hubiera querido expresarle.

## CAPITULO I

## LA TEORIA DE MORSE

En este capítulo se exponen los resultados fundamentales de la Teoría de Morse para funciones suaves con puntos críticos no degenerados. Es decir, el Teorema de Descomposición en Asas y las famosas Desigualdades de Morse. Los términos diferenciable y suave significaran siempre de clase  $C^\infty$  y nuestras variedades siempre serán sin frontera. No distinguiremos entre coordenadas locales  $x^i$  para una variedad y las funciones coordenadas  $x^i$  en  $\mathbb{R}^n$ .

1.1. Definiciones y Lemas

En esta sección se presentan las definiciones básicas y algunos lemas. Entre ellos el Lema de Morse, fundamental para el desarrollo de toda la teoría.

1.1.1. Definición: Sean  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  y  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave.

Un punto  $q \in M$  es un punto crítico de  $f$  si  $df|_q = 0$ .

En coordenadas locales  $(Uq; \varphi)$  esto quiere decir:  $\frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x^i} |_{\varphi(q)} = 0$  para toda  $i$ . Es fácil de verificar que esta propiedad no depende de que sistema de coordenadas utilicemos.

Dados  $V, W \in Mq$ , sean  $\tilde{V}, \tilde{W}$  dos campos de vectores suaves sobre  $M$  que extienden a  $V$  y  $W$ .

Por ejemplo  $\tilde{V}$  se puede construir así: Si  $V = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_q$  donde  $(Uq; x^1, \dots, x^n)$  es un sistema de coordenadas locales y  $g: M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suave tal que  $g(q) = 1$  y  $\text{Supp}(g) \subseteq Uq$ , entonces definimos a  $\tilde{V}$  como  $\tilde{V} = g \cdot (V | Uq)$ .

1.1.2. Definición: Sean  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ ,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave y

$q \in M$  un punto crítico de  $f$ . Definimos una forma bilineal simétrica  $H_f: Mq \times Mq \rightarrow \mathbb{R}$

llamada la forma Hessiana de  $f$  en  $q$ , mediante la siguiente fórmula:

$$H_f(V, W) = \tilde{V}_q(\tilde{W}(f)) = V(\tilde{W}(f)).$$

Es claro que  $H_f$  es independiente de la extensión  $\tilde{V}$ . Probemos ahora que  $H_f$  es simétrica y por lo tanto independiente de la extensión  $\tilde{W}$ :  $H_f(V, W) - H_f(W, V) = [\tilde{V}, \tilde{W}]_q(f)$  ( $[\tilde{V}, \tilde{W}]$  es el corchete de Lie de  $\tilde{V}$  y  $\tilde{W}$ , y es un campo de vectores) y como  $q$  es un punto crítico de  $f$ , entonces  $[\tilde{V}, \tilde{W}]_q(f) = 0$ .

1.1.3 Definición: Con la misma notación que en 1.1.2., se dice que el punto crítico  $q$  es no-degenerado si  $H_f$  es no degenerada (ver Apéndice 1). En coordenadas locales  $(Uq; x^1, \dots, x^n)$  esto quiere decir que la matriz Hessiana  $\left( H_f \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_q, \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_q \right) \right) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_q \right)$  es no singular. Demostremos que esta condición es independiente del sistema de coordenadas: sea  $(Uq; y^1, \dots, y^n)$  otro sistema de coordenadas alrededor de  $q$ , entonces

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x^n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial y^n}{\partial x^1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^n} & \dots & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial y^n} \end{bmatrix}$$

$$\text{luego } \frac{\partial f}{\partial x^i} = \sum_k \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial y^k}$$

$$\text{Por lo tanto } \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_q = \sum_k \frac{\partial^2 y^k}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_q \frac{\partial f}{\partial y^k} \Big|_q + \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \Big|_q \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial y^k} \Big|_q \text{ y como } q \text{ es un punto}$$

$$\text{crítico de } f \text{ entonces } \frac{\partial f}{\partial y^k} \Big|_q = 0 \text{ y tenemos: } \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \Big|_q = \sum_k \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \Big|_q \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial y^k} \Big|_q =$$

$$= \sum_k \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \Big|_q \cdot \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \Big|_q \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^k \partial y^l} \Big|_q$$

Ahora la matriz  $\begin{pmatrix} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \end{pmatrix}$  es no singular, luego  $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial y^j} \end{pmatrix}$  es no singular ssi  $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \end{pmatrix}$  es no singular.

1.1.4 **Proposición:** Sean  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  y  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave. Entonces los puntos críticos no-degenerados de  $f$  son aislados en el conjunto de los puntos críticos.

**Demostración:** Sea  $q$  un punto crítico de  $f$  y  $(U_q; x^1, \dots, x^n)$  un sistema de coordenadas alrededor de  $q$ . Consideremos la siguiente aplicación  $g: U_q \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $g(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x^n} \end{pmatrix} \Big|_p$ , entonces  $g(p) = 0$  ssi  $p$  es un punto crítico de  $f$ . Ahora bien la matriz Jacobiana de  $g$  es  $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \end{pmatrix}$  que es no-singular en  $q$ , luego por el teorema de la función inversa  $g$  es 1-1 en una vecindad de  $q$ . Como  $g(q) = 0$  entonces  $q$  es el único punto crítico de  $f$  en esta vecindad.  $\square$

Se sigue que si  $f$  es una función que tiene solamente puntos críticos no-degenerados sobre una variedad compacta, entonces tiene solo un número finito de ellos. Sin embargo en general no es cierto que los puntos críticos de una función suave sean aislados, como muestra el siguiente

**Ejemplo 1** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida así,  $f(x) = e^{-1/x^2} \sin(x)$ . El origen es un punto crítico degenerado y todos los demás son no-degenerados.

**Ejemplo 2** Sea  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida así  $f(x,y) = x^2$ , entonces todos los puntos del eje  $y$  son puntos críticos degenerados y forman una subvariedad de  $\mathbb{R}^2$ .

1.1.5 **Definición:** Con la misma notación que en 1.1.1, el índice del punto crítico no degenerado  $q$  es el número de valores propios negativos de la matriz simétrica  $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \end{pmatrix}$ ; es también



independiente del sistema de coordenadas; pues corresponde a la dimensión de un subespacio lineal más grande de  $M_q$ , donde la forma bilineal a  $H_p$  es definida negativa (Apéndice 1).

Una función suave tal que todos sus puntos críticos son no degenerados se llama una función de Morse. Más adelante demostraremos que existen funciones de Morse sobre toda variedad diferenciable. Los siguientes ejemplos los utilizaremos para ilustrar la teoría a lo largo del capítulo. En el Apéndice 2 se explica la teoría necesaria (ver [Br-CL]; capítulo 6).

Ejemplo 3 (El Toro): Mostraremos que sobre el Toro existe una función de Morse con exactamente cuatro puntos críticos, de índices 0,1,1 y 2. En el ejemplo 1 del Apéndice 2 se muestra que el Toro es homeomorfo a  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} / \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Del Teorema de este Apéndice resulta que si  $\mu: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  es la aplicación natural entonces localmente  $\mu$  es una parametrización de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} / \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Es fácil ver que  $\mu$  es 1-1 sobre los siguientes conjuntos:  $U_1 = (0,1) \times (0,1)$ ,  $U_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (0,1)$ ,  $U_3 = (0,1) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ,  $U_4 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  y que sus imágenes por  $\mu$  recubren a  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} / \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Definamos una aplicación  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f([(x,y)]) = \text{Sen}(2\pi x) + \text{Sen}(2\pi y)$ . Es claro que  $f$  está bien definida y además  $f \circ \mu: U_i \rightarrow \mathbb{R}$  es simplemente  $\text{Sen}(2\pi x) + \text{Sen}(2\pi y)$ , luego  $f$  es suave. Calculemos los puntos críticos de  $f \circ \mu$  en  $\bigcup_{i=1}^4 U_i$ :  $\frac{\partial f \circ \mu}{\partial x} = 2\pi \text{Cos}(2\pi x)$ ,  $\frac{\partial f \circ \mu}{\partial y} = 2\pi \text{Cos}(2\pi y)$ . Los puntos críticos son  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ,  $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ ,  $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ ,  $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$  y las imágenes de estos puntos por  $\mu$  son todos distintos, luego  $f$  tiene exactamente cuatro puntos críticos. La matriz Hessiana de  $f \circ \mu$  es:

$$\begin{bmatrix} -4\pi^2 \text{Sen}(2\pi x) & 0 \\ 0 & -4\pi^2 \text{Sen}(2\pi y) \end{bmatrix}$$

Evaluando en los puntos críticos vemos que son no-degenerados y de índices 2,1,0,1 respectivamente.

**Ejemplo 4** (Botella de Klein). En el Apéndice II, se muestra que la Botella de Klein es homeomorfa a  $T/Z_2$  donde  $T = \mathbb{R}^2/Z^2$ . Sean  $\mu_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/Z^2$  y  $\mu_2: T \rightarrow T/Z_2$  las aplicaciones naturales y definamos la función  $f: T/Z_2 \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $f([(x,y)]) = \text{Sen}(2\pi x) \cdot \text{Sen}(2\pi y)$ , donde  $[(x,y)] = \mu_2 \circ \mu_1^{-1}(x,y)$ . Es fácil verificar que  $f$  está bien definida. Ahora en el ejemplo 3 utilizamos el hecho de que  $\mu_1$  es 1-1 sobre los conjuntos  $U_1, U_2, U_3, U_4$  y es claro que si hacemos una subdivisión más fina de  $\bigcup_{i=1}^4 U_i$ , podemos encontrar abiertos de  $\mathbb{R}^2$  donde  $\mu_2 \circ \mu_1$  es 1-1 y utilizarlos como parametrizaciones locales de  $T/Z_2$ . En esta parametrización de  $T/Z_2$ ,  $f$  es simplemente la función  $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f'} \text{Sen}(2\pi x) \cdot \text{Sen}(2\pi y)$ , luego  $f$  es suave. Calculemos los puntos críticos de  $f'$  en  $\bigcup_{i=1}^4 U_i$ :

$$\frac{\partial f'}{\partial x} = 2\pi \text{Cos}(2\pi x) \cdot \text{Sen}(2\pi y), \quad \frac{\partial f'}{\partial y} = 2\pi \text{Cos}(2\pi y) \text{Sen}(2\pi x).$$

Los candidatos a puntos críticos son:  $(\pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{4})$ ,  $(\frac{3}{4}, \pm \frac{1}{4})$ ,  $(\pm \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ ,  $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ ,  $(0,0)$ ,  $(\frac{1}{2}, 0)$ ,  $(0, \frac{1}{2})$ ,  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . De todos estos puntos solamente cuatro son diferentes después de tomar sus imágenes por  $\mu_2 \circ \mu_1$ . Escojamos como representantes a  $(0,0)$ ,  $(0, \frac{1}{2})$ ,  $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ,  $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$ . La matriz Hessiana de  $f'$  es

$$\begin{bmatrix} -4\pi^2 \text{Sen}(2\pi x) \cdot \text{Sen}(2\pi y) & 4\pi^2 \text{Cos}(2\pi y) \cdot \text{Cos}(2\pi x) \\ 4\pi^2 \text{Cos}(2\pi y) \cdot \text{Cos}(2\pi x) & -4\pi^2 \text{Sen}(2\pi y) \cdot \text{Sen}(2\pi x) \end{bmatrix}$$

evaluando en los puntos críticos obtenemos finalmente que todos son no-degenerados y de índices 1,1,0, y 2 respectivamente.

**Ejemplo 5** (El Espacio Proyectivo Real). Sea  $\mu: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$  la aplicación natural entre  $S^{n-1}$  y

el espacio proyectivo real de dimensión  $n-1$  (ver Apéndice II). Sea  $E_i = \{(x_1, \dots, x_n) \in S^{n-1} : x_i > 0\}$  y  $\Pi_i: S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  la proyección:  $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ . Como  $\mu$  es 1-1 sobre  $E_i$ , entonces las parejas  $(\mu(E_i); \Pi_i \circ (\mu|_{E_i})^{-1})$  forman un atlas de  $\mathbb{R}P^{n-1}$  (es fácil ver que  $\mu$  es una función abierta). Sea ahora  $A$  una matriz real diagonal:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, \text{ donde } \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n. \text{ Y consideremos la siguiente función}$$

$$f: \mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$$

definida así:  $f([(x_1, \dots, x_n)]) = (x_1, \dots, x_n) A (x_1, \dots, x_n)^T$ . Es claro que  $f$  está bien definida y  $f \circ \mu \circ \Pi_k^{-1}: \Pi_k(E_k) \rightarrow \mathbb{R}$  tiene la siguiente forma: Si  $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \in \Pi_k(E_k)$  y  $x_k = [1 - x_1^2 - \dots - x_{k-1}^2 - \dots - x_n^2]^{1/2}$ , entonces  $f \circ \mu \circ \Pi_k^{-1}(x_1, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) A (x_1, \dots, x_n)^T$ . Esto demuestra que  $f$  es suave. Ahora demos que  $f$  es una función de Morse con exactamente  $n$  puntos críticos de índices respectivos  $0, 1, \dots, n-1$ . Calculemos las derivadas parciales de  $f \circ \mu \circ \Pi_k^{-1}$ . Si  $\alpha \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$  entonces:

$$\frac{\partial f \circ \mu \circ \Pi_k^{-1}}{\partial x^\alpha} (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) = 2(-x_\alpha \lambda_k + \lambda_\alpha x_\alpha). \text{ Luego si } (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

es punto crítico, se tiene:  $\lambda_k x_\alpha = \lambda_\alpha x_\alpha$  y por lo tanto  $x_\alpha = 0$ , luego el punto  $(0, \dots, 1, \dots, 0)$  es un vector propio de  $A$ , y recíprocamente, cada vector propio de  $A$  de norma uno, o sea  $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1)$  da lugar a un punto crítico distinto de  $f: \mu(1, 0, \dots, 0), \dots, \mu(0, \dots, 1)$ .

Calculemos ahora la matriz Hessiana de  $f \circ \mu \circ \Pi_k^{-1}$ . Si  $\beta \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$  entonces:

$$\frac{\partial^2 f_{\text{form } \Pi_k^{-1}}}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} = \begin{cases} 2(\lambda_\alpha - \lambda_k) & \text{si } \beta = \alpha \\ 0 & \text{si } \beta \neq \alpha \end{cases}$$

Por consiguiente los puntos críticos son no-degenerados y el índice de  $\mu(0, \dots, 1, \dots, 0)$  es  $k-1$ .

1.1.6 Lema: Sean  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto convexo que contiene al origen y  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave tal que  $f(0) = 0$ . Entonces  $f$  se puede representar de la siguiente forma:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n)$$

para ciertas funciones suaves  $g_i: V \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ .

Demostración:  $f(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{df}{dt}(tx_1, \dots, tx_n) dt = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) x_i dt$ , luego

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) dt. \quad \square$$

1.1.7 Lema ("Lema de Morse"): Sean  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ ,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave y  $p \in M$  un punto crítico no-degenerado. Existe entonces un sistema de coordenadas  $(U_p, x^1, \dots, x^n)$  alrededor de  $p$  tal que:  $f|U_p = f(p) - (x^1)^2 - \dots - (x^k)^2 + (x^{k+1})^2 + \dots + (x^n)^2$ , donde  $k$  es el índice de  $f$  en  $p$ .

Demostración: Podemos suponer que  $f(p) = 0$  y componiendo con cualquier sistema de coordenadas  $(V_p, \psi)$  alrededor de  $p$  tal que  $\psi(p) = 0$  y  $\psi(V_p)$  sea un abierto convexo de  $\mathbb{R}^n$ ; podemos además suponer que  $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  es abierto, convexo y contiene al origen. Se trata ahora de encontrar un sistema de coordenadas  $(U; x^1, \dots, x^n)$  alrededor del origen tal que:  $f|U = -(x^1)^2 - \dots - (x^k)^2 + (x^{k+1})^2 + \dots + (x^n)^2$ . Es fácil de ver que si  $f$  tiene esta representación entonces  $k$  tiene que ser el índice de  $p$  (es decir el índice del origen): puesto que

la matriz Hessiana de  $f$  en esta representación es:

$$\begin{bmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$$

Para la existencia de  $(U, x^1, \dots, x^n)$  utilizamos el lema 1.1.6. y escribimos a  $f$  como:

$f|W = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n)$ , donde  $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ . Como el origen es punto crítico de  $f$  entonces  $g_i(0) = 0$  y aplicando el lema 1.1.6. a cada  $g_i$ , podemos escribir

$f|W = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ . Los  $h_{ij}$  los podemos suponer simétricos. En efecto sean  $H$  la matriz  $(h_{ij})$  y  $X$  el vector fila  $(x_1, \dots, x_n)$ . Entonces  $f|W$  en forma matricial es simplemente:

$$XHX^T = \frac{XHX^T + (XHX^T)^T}{2} = X\left(\frac{H + H^T}{2}\right)X^T.$$

Ahora,  $h_{ij}(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0)$ , luego la matriz  $(h_{ij}(0))$  es no singular. La idea ahora es imitar el proceso de diagonalización de una forma cuadrática.

Supongamos que existen coordenadas locales  $U_1, \dots, U_n$  alrededor del origen (se sobreentienden los dominios en lo que sigue) tales que:

$$f = \pm U_1^2 \dots \pm U_{r-1}^2 + \sum_{i,j \geq r}^n U_i U_j H_{ij}(U_1, \dots, U_n), \quad (*)$$

donde la matriz  $(H_{ij})$  es simétrica y suave y la matriz  $(H_{ij}(0))$  es no singular. Ahora después de una transformación lineal de las últimas  $n-r+1$  coordenadas podemos suponer que la matriz  $H_{ij}(0)$  es diagonal y por lo tanto  $H_{rr}(0) \neq 0$ .

Definimos ahora las coordenadas  $V_1, \dots, V_n$  así:

$$V_i = U_i \quad \text{si } i \neq r \quad \text{y} \quad (**)$$

$$V_r = \sqrt{|H_{rr}(U_1, \dots, U_n)|} \left[ U_r + \sum_{i>r} \frac{U_i H_{ir}(U_1, \dots, U_n)}{H_{rr}(U_1, \dots, U_n)} \right]$$

Calculamos la matriz Jacobiana de esta transformación en el origen. Es fácil de ver que tiene la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \sqrt{|H_{rr}(0)|} & \frac{H_{ir}\sqrt{|H_{rr}|}}{H_{rr}} \Big|_0 & \dots & \frac{H_{nr}\sqrt{|H_{rr}|}}{H_{rr}} \Big|_0 \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es no singular, luego por el Teorema de la Función Inversa, las funciones  $V_1, \dots, V_n$  son coordenadas locales en una vecindad del origen y podemos escribir:

$$U_i = V_i \quad \text{para } i \neq r \text{ y}$$

$$U_r = g(V_1, \dots, V_n) \quad \text{para una función suave } g \text{ definida sobre un abierto que contiene al origen: y}$$

tal que  $g(0, 0, \dots, 0) = 0$ . Invertiendo las ecuaciones (\*\*\*) obtenemos:

$$U_i = V_i \quad \text{para } i \neq r \text{ y}$$

$$U_r = \frac{V_r}{\sqrt{|H_{rr}(V_1, \dots, g(V_1, \dots, V_n), \dots, V_n)|}} - \sum_{i>r} \frac{V_i H_{ir}(V_1, \dots, g(V_1, \dots, V_n), \dots, V_n)}{H_{rr}(V_1, \dots, g(V_1, \dots, V_n), \dots, V_n)} \quad (***)$$

Definimos  $\tilde{H}_{ij}(V_1, \dots, V_n) = H_{ij}(V_1, \dots, g(V_1, \dots, V_n), \dots, V_n)$  y si sustituimos en (\*) se obtiene:

$$f = \pm V_1^2 \dots \pm V_{i-1}^2 + \left( \sum_{i,j>r} V_i V_j \tilde{H}_{ij}(\vec{V}) \right) + H_{rr} U_r \left( U_r + 2 \sum_{i>r} \frac{V_i \tilde{H}_{ir}}{\tilde{H}_{rr}} \right), \text{ donde}$$

$\vec{V} = (v_1, \dots, v_n)$  utilizando (\*\*\*) obtenemos entonces

$$f = \pm v_1^2 \dots \pm v_{r-1}^2 + \sum_{i,j>r} v_i v_j \tilde{H}_{ij}(\vec{V}) + H_{rr} U_r \left( \frac{v_r}{\sqrt{|\tilde{H}_{rr}(\vec{V})|}} + \sum_{i>r} \frac{v_i \tilde{H}_{ir}(\vec{V})}{\tilde{H}_{rr}(\vec{V})} \right)$$

$$= \pm v_1^2 \dots \pm v_{r-1}^2 + \sum_{i,j>r} v_i v_j \tilde{H}_{ij}(\vec{V}) \pm v_r^2 - \frac{1}{\tilde{H}_{rr}(\vec{V})} \left( \sum_{i>r} v_i \tilde{H}_{ir}(\vec{V}) \right)^2;$$

pero  $\left[ \sum_{i>r} v_i \tilde{H}_{ir}(\vec{V}) \right]^2 = \sum_{i,j>r} v_i v_j \tilde{H}_{ir}(\vec{V}) \cdot \tilde{H}_{jr}(\vec{V})$ , luego

$f = \pm v_1^2 \dots \pm v_r^2 + \sum_{i,j>r} v_i v_j \left( \tilde{H}_{ij} - \frac{\tilde{H}_{ir} \tilde{H}_{jr}}{\tilde{H}_{rr}} \right)$ . Para terminar, sea  $M_{ij} = \tilde{H}_{ij} - \frac{\tilde{H}_{ir} \tilde{H}_{jr}}{\tilde{H}_{rr}}$  y mostremos que la matriz  $(M_{ij})_{i,j>r}$  es no singular en el origen  $(M_{ij})$  es obviamente simétrica y suave). Ahora bien  $M_{ij}$  en el origen es simplemente  $H_{ij}$  porque en el origen la matriz  $(H_{ij})_{i,j>r}$  es diagonal.  $\square$

Con este lema hemos obtenido una descripción local completa de toda función de Morse  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ : Si  $p$  es un punto regular de  $f$ , (es decir  $p$  no es un punto crítico) entonces existe  $(U_p; x^1, \dots, x^n)$  tal que  $f|U_p = x_1$ . Esto es una consecuencia del Teorema de la Función Inversa ([Br-CL]; página 85). Si  $p$  es un punto crítico, entonces el Lema de Morse nos dice cómo es  $f$  localmente.

**1.1.8 Definición:** Un grupo de difeomorfismos con un parámetro en una variedad diferenciable  $M$ , es una aplicación suave  $\varphi: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  tal que:

- Para cada  $t \in \mathbb{R}$  la aplicación  $\varphi_t = \varphi(t, \cdot) : M \rightarrow M$  es un difeomorfismo.
- Para cada  $t, s \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ .

Si  $X$  es un campo de vectores suave sobre  $M$ , se dice que  $X$  genera un grupo de difeomorfismos con un parámetro si existe una aplicación  $\varphi$  como en la definición anterior tal que para cada  $m \in M$  la aplicación  $\varphi_t(m): \mathbb{R} \rightarrow M$ , es una curva integral de  $X$ , con  $\varphi_0(m) = m$ . En otras palabras  $X$  es completo ([War], página 39). Observemos que afirmar que  $\varphi_t(m)$  es una curva integral de  $X$  para cada  $m \in M$ , es equivalente a decir que para toda función suave  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  se tiene  $X_p(f) = \frac{d}{dt} f(\varphi_t(p)) \Big|_{t=0}$  para toda  $p \in M$ ; pues dado  $p$ , el hecho de que  $\varphi_t(p)$  sea curva integral de  $X$  significa que  $\frac{d\varphi_t(p)}{dt} \Big|_t = X_{\varphi_t(p)} f$  para toda  $f \in C^\infty(M)$ . Luego  $\frac{d}{dt} f(\varphi_t(p)) \Big|_t = X_{\varphi_t(p)}(f)$  y evaluando en cero vemos que  $\frac{d}{dt} f(\varphi_t(p)) \Big|_0 = X_p(f)$ . Ahora en la otra dirección: dados  $m \in M$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$  y  $f \in C^\infty(M)$  tenemos:  $X_{\varphi_{t_0}(m)}(f) = \frac{d}{dt} f(\varphi_t(\varphi_{t_0}(m))) \Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt} (\varphi_{t+t_0}(m)) \Big|_{t=0}$  y cambiando de variable esto es lo mismo que  $\frac{d}{dt} f(\varphi_t(m)) \Big|_{t=t_0}$ .

1.1.9 **Lema** Sea  $X$  un campo de vectores suave sobre  $M$  que se anula por fuera de un subconjunto compacto  $K$  de  $M$  ( $K$  también puede ser  $M$ , si  $M$  es compacto). Entonces  $X$  genera un único grupo de difeomorfismos con un parámetro.

Demostración: La unicidad es obvia, por la unicidad de las curvas integrales definidas sobre todo  $\mathbb{R}$ . Ahora para cada  $m$  sea  $r_m$  una curva integral de  $X$  (definida sobre un intervalo abierto que contiene a cero) tal que  $r_m(0) = m$ , y sean  $V_m$  una vecindad de  $m$  y  $\epsilon_m \in \mathbb{R}$  con  $\epsilon_m > 0$ ; tales que la siguiente aplicación  $\varphi$  está bien definida y es suave ([War], página 37).

$$\varphi: (-\epsilon_m, \epsilon_m) \times V_m \rightarrow M$$

$$(t, p) \rightarrow r_p(t).$$

Ahora  $K$  puede ser recubierto por un número finito de abiertos de la forma anterior:  $V_1, \dots, V_\alpha$ . Sean  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_\alpha$  los números reales correspondientes. Sea ahora  $\epsilon_0 = \min \{ \epsilon_1, \dots, \epsilon_\alpha \}$  y definamos la siguiente aplicación:

$$\tilde{\varphi}: (-\epsilon_0, \epsilon_0) \times M \rightarrow M$$



$$(t,p) \rightarrow \tilde{\varphi}(t,p) = \begin{cases} p & \text{si } p \notin K \\ r_p(t) & \text{si } p \in V_1 U \dots U V_\alpha \end{cases}$$

Es fácil ver que  $\tilde{\varphi}$  está bien definida, pues si  $r_p, r'_p$  son dos curvas integrales de  $X$ , entonces  $r_p = r'_p$  en la intersección de sus dominios, y si  $p \in K^C \cap (V_1 U \dots U V_\alpha)$  entonces  $r_p(t) = p$  porque  $X$  se anula en  $K^C$ . Por último es claro que  $\tilde{\varphi}$  es suave, además  $\tilde{\varphi}_{t+S} = \tilde{\varphi}_t \circ \tilde{\varphi}_S$  para  $|t|, |S|, |t+S| < \epsilon_0$ , luego  $\tilde{\varphi}_t$  es un difeomorfismo para cada  $t \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ .

Solo falta definir  $\tilde{\varphi}_t$  para  $t \notin (-\epsilon_0, \epsilon_0)$ . Dado  $t$  tal que  $|t| \geq \epsilon_0$ , sea  $t = k \frac{\epsilon_0}{2} + r$  donde  $r < \frac{\epsilon_0}{2}$  y  $k \in \mathbb{Z}$ . Definimos:  $\tilde{\varphi}_t = \tilde{\varphi}_{\frac{\epsilon_0}{2}}$  0... 0  $\tilde{\varphi}_{\frac{\epsilon_0}{2}}$  o  $\tilde{\varphi}_r$  si  $k > 0$ , y se cambia  $\epsilon_0$  por  $-\epsilon_0$ ,  $k$ -veces

Si  $k < 0$ . De nuevo  $\varphi_{t+S} = \varphi_t \circ \varphi_S$  para todo  $t, S \in \mathbb{R}$  y  $\varphi$  es suave en  $\mathbb{R} \times M$ . Para terminar mostremos que para cada  $m \in M$ ,  $\varphi_t(m)$  es una curva integral de  $X$ . Según la observación hecha después de la definición 1.8, tenemos que demostrar que  $X_p(f) = \frac{d}{dt} (f \tilde{\varphi}_t(p)) |_{t=0} = \frac{d}{dt} \tilde{\varphi}_t(p) |_{t=0}(f)$  para  $p \in M$  y  $f \in C^\infty(M)$ . Pero esto es obvio de la definición de  $\tilde{\varphi}$  alrededor de cero.  $\square$

La hipótesis de que  $X$  se anule por fuera de un compacto es necesaria; por ejemplo si  $X = \frac{d}{dx}$  y  $M = (0,1)$ , entonces las curvas integrales de  $X$  son  $\varphi_t(m) = t+m$  para  $-m < t < 1-m$  y no es posible extender  $\varphi_t$  a todo  $\mathbb{R}$ .

## 1.2. Tipo de Homotopía en términos de valores críticos.

En esta sección se presenta uno de los resultados fundamentales de la Teoría de Morse: el Teorema de Descomposición en Asas. Denotaremos por  $M^a$  al conjunto  $\{m \in M: f(m) \leq a\}$  donde  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  y  $a \in \mathbb{R}$ .

1.2.1 Teorema. Sean  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$  y  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave.

Dados  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b > a$ , si  $f^{-1}[a, b]$  es compacto y no contiene ningún punto crítico de  $f$ , entonces  $M^a$  es difeomorfo a  $M^b$  y  $M^a$  es un retracts de deformación de  $M^b$ , de manera que la inclusión  $i: M^a \rightarrow M^b$  es una equivalencia homotópica.

Demostración: Escogamos una estructura de Riemann  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  para  $M$  ([War], página 52). El gradiente de  $f$ , que denotamos por  $\nabla f$ , es un campo de vectores suave, caracterizado por la siguiente fórmula:  $\langle X, \nabla f \rangle = X(f)$  para todo campo de vectores suave  $X$  sobre  $M$ ; pues para cada  $m \in M$ , si consideramos a  $df|_m \in M_m^*$ , entonces existe un único  $W_m \in M_m$  tal que  $\langle V, W_m \rangle = df|_m(V)$  para todo  $V \in M_m$ . En particular cuando  $V = X_m$  entonces  $\nabla f|_m$  se define como  $W_m$ ; es decir  $\langle X_m, \nabla f|_m \rangle = df|_m(X_m) = X_m(f)$ . Además  $\nabla f$  es suave, pues en coordenadas locales  $(U_m, x^1, \dots, x^n)$ , si definimos a  $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle$  y denotamos por  $(g^{ij})$  a la matriz inversa de  $(g_{ij})$ , entonces es fácil ver que las componentes de  $\nabla f$  con respecto a  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\}$  son  $\left\{ \sum_j g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right\}$ :  $\langle X, \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x^j} g^{ij} \langle X, \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle$ , y si escribimos  $X = \sum_k a_k \frac{\partial}{\partial x^k}$  entonces la última expresión se reduce a:  $\sum_{i,j} \sum_k a_k \frac{\partial f}{\partial x^j} g^{ij} g_{ki} = \sum_{j,k} a_k \frac{\partial f}{\partial x^j} \delta_k^j = \sum_j a_j \frac{\partial f}{\partial x^j} = X(f)$ .

Ahora como  $\nabla f|_m = 0$  ssi  $m$  es un punto crítico de  $f$ , entonces la función  $\rho: f^{-1}[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\rho(x) = 1/\langle \nabla f, \nabla f \rangle_m$  es suave. Utilizando la normalidad de  $M$  y el Teorema de Extensión de Tietze podemos extender  $\rho$  a todo  $M$ . Utilizando la compacidad local de  $M$  y la compacidad de  $f^{-1}[a, b]$ , podemos encontrar un abierto  $U \supset f^{-1}[a, b]$  tal que  $\bar{U}$  es compacto y como  $f^{-1}[a, b]$  es compacto, podemos encontrar una función suave  $\bar{\rho}: M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\bar{\rho}|_{f^{-1}[a, b]} = 1/\langle \nabla f, \nabla f \rangle$  y  $\text{supp}(\bar{\rho}) \subseteq U$  ([War], página 11).

Definamos ahora el siguiente campo de vectores  $X$  sobre  $M$  como  $X = \bar{p} \cdot \nabla f$ , que satisface las hipótesis del lema 1.1.9. y sea entonces  $\varphi_t: M \rightarrow M$  el grupo de difeomorfismos generados por él. Para  $q \in M$  fijo, supongamos que  $f(\varphi_t(q)) \in [a, b]$  para  $t$  en un intervalo de la forma  $[t_0, t_0 + \epsilon)$ . En este caso:

$$\frac{d}{dt} f(\varphi_t(q)) \Big|_t = \left\langle \frac{d\varphi_t(q)}{dt}, \nabla f \right\rangle = \langle X, \nabla f \rangle_{\varphi_t(q)} = 1, \text{ para } t \in [t_0, t_0 + \epsilon).$$

Consideremos ahora el difeomorfismo  $\varphi_{b-a}: M \rightarrow M$  y probemos que  $\varphi_{b-a}(M^a) = M^b$ . Primero mostremos que  $\varphi_{b-a}(M^a) \subseteq M^b$ . Sean  $m \in M^a$  y  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq t_0 < b-a$  tal que  $f(\varphi_{t_0}(m)) = a$  y  $f(\varphi_t(m)) \in [a, b]$  para  $t \in [t_0, t_0 + \epsilon)$  y algún  $\epsilon > 0$  (si no existe un  $t_0$  con esta propiedad entonces, por la continuidad de  $f$  y  $\varphi$ ;  $\varphi_{b-a}(m) \in M^a \subseteq M^b$ ).

Por consiguiente para  $t \in [t_0, t_0 + \epsilon)$ , tenemos que

$$f(\varphi_t(m)) = t - t_0 + f(\varphi_{t_0}(m)) = t - t_0 + a. \quad (*)$$

Ahora para todo  $\epsilon < b-a-t_0$ , la ecuación (\*) sigue valiendo para los  $t \in [t_0, t_0 + \epsilon)$ . Por la continuidad de  $f$  y  $\varphi$  se sigue que la ecuación (\*) es válida para  $t = t_0 + (b-a-t_0) = b-a$ , luego  $f(\varphi_{b-a}(m)) = b-t_0 \leq b$ .

Para mostrar que  $\varphi_{b-a}$  aplica a  $M^a$  sobre  $M^b$ , cojemos un  $m \in M^b$  y repetimos el procedimiento anterior a la aplicación  $\varphi_{a-b}$ , luego  $\varphi_{a-b}(m) \in M^a$  y por lo tanto  $\varphi_{b-a}(\varphi_{a-b}(m)) = m$ . Obsérvese que  $\varphi_{b-a}(f^{-1}(a)) = f^{-1}(b)$ . Este hecho lo utilizaremos en la prueba del Teorema de Reeb.

Por último queremos definir un retracto de deformación entre  $M^a$  y  $M^b$ .

Sea  $r: [0, 1] \times M^b \rightarrow M^b$

$$(t, m) \rightarrow \begin{cases} m & \text{si } f(m) \leq a \\ \varphi_{(a-f(m))}(m) & \text{si } a \leq f(m) \leq b \end{cases}$$

entonces  $r(0, m) = m$  para toda  $m$  y  $r(1, \cdot)$  es una retracción de  $M^b$  a  $M^a$ . Finalmente  $r$  es continua, pues cuando  $f(m) \rightarrow a$  entonces  $\varphi_{(a-f(m))}^{(m)} \rightarrow m$ .

Como una aplicación de este Teorema tenemos:

1.2.2 **Teorema (Reeb)**. Sean  $M$  una variedad diferenciable, compacta de dimensión  $n$ , y  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave con dos puntos críticos exactamente. Supongamos que los puntos críticos son no-degenerados. Entonces  $M$  es homeomorfa a una  $n$ -esfera.

Demostración: Los dos puntos críticos deben corresponder a un mínimo y un máximo. Supongamos que  $f(p) = \tilde{m}$  es el mínimo y  $f(q) = \tilde{M}$  es el máximo. Por el lema de Morse existe un sistema de coordenadas alrededor de  $p$ ,  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  tal que:

$$f|U = f(p) - (x^1)^2 - \dots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \dots + (x^n)^2.$$

Como  $f(p)$  es un mínimo, entonces  $\lambda = 0$ , luego  $f|U = f(p) + (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2$ . Sea  $\epsilon$  suficientemente pequeño tal que  $f^{-1}[\tilde{m}, \tilde{m} + \epsilon] \subseteq U$ . Ahora el conjunto de puntos  $m \in U$  tales que  $\tilde{m} \leq f(p) + x^1(m)^2 + \dots + x^n(m)^2 \leq \tilde{m} + \epsilon$ , cumple  $x^1(m)^2 + \dots + x^n(m)^2 \leq \epsilon$ , luego  $f^{-1}[\tilde{m}, \tilde{m} + \epsilon] \simeq B^n$  (utilizamos  $\simeq$  para indicar espacios homeomorfos). Pero  $f^{-1}[\tilde{m}, \tilde{m} + \epsilon] = M^{\tilde{m} + \epsilon}$  y por lo tanto  $M^{\tilde{m} + \epsilon} \simeq B^n$ . Además obsérvese que el homeomorfismo entre  $M^{\tilde{m} + \epsilon}$  y  $B^n$  induce un homeomorfismo entre  $f^{-1}(\tilde{m} + \epsilon)$  y  $\partial B^n = S^{n-1}$ . ( $\partial B^n$  denota la frontera de  $B^n$ ).

Ahora un argumento similar muestra que  $f^{-1}[\tilde{M} - \epsilon, \tilde{M}]$  es homeomorfo a  $B^n$  y que este homeomorfismo induce un homeomorfismo entre  $f^{-1}(\tilde{M} - \epsilon)$  y  $\partial B^n = S^{n-1}$ . Por el teorema 1.2.1.  $M^{\tilde{m} + \epsilon}$  es difeomorfo a  $M^{\tilde{M} - \epsilon}$  y de la demostración de este teorema se ve que el difeomorfismo aplica  $f^{-1}(\tilde{m} + \epsilon)$  sobre  $f^{-1}(\tilde{M} - \epsilon)$ .

En conclusión tenemos que  $M$  es homeomorfo a la unión de dos bolas de dimensión  $n$ , unidas por el borde mediante la identidad  $\text{id}: S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ . Es ahora fácil construir un homeomorfismo  $H$  entre  $M$  y  $S^n$  (figura 1.2.1).  $\square$

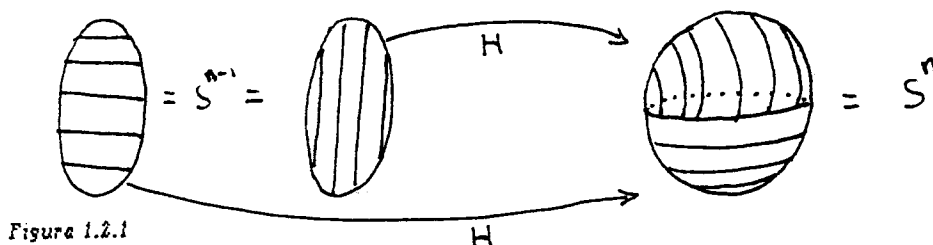


Figura 1.2.1

1.2.3 **Teorema** (Teorema de Descomposición en Asas). Sean  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ , y  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave, con  $p \in M$  un punto crítico no-degenerado de índice  $\lambda$ . Sea  $C = f(p)$  y supongamos que  $f^{-1}[C - \epsilon', C + \epsilon']$  es compacto y no contiene ningún punto crítico distinto de  $p$ ; para cierto  $\epsilon' > 0$ . Existe entonces un  $\epsilon$ ,  $0 < \epsilon < \epsilon'$  tal que  $M^{C+\epsilon}$  tiene el mismo tipo de homotopía de  $M^{C-\epsilon}$  con una  $\lambda$ -celda,  $e^\lambda$  pegada por el borde  $\partial e^\lambda$  mediante la inclusión  $i: \partial e^\lambda \rightarrow M^{C-\epsilon}$  ( $\partial e^\lambda$  es la frontera de  $e^\lambda$ ; homeomorfa a  $S^{\lambda-1}$ ).

Demostración: Sean  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  un sistema de coordenadas alrededor de  $p$  tal que  $f|U = C - (x^1)^2 - \dots - (x^\lambda)^2 + (x^{\lambda+1})^2 + \dots + (x^n)^2$ , y  $\epsilon' > 0$  tal que  $f^{-1}[C - \epsilon', C + \epsilon']$  sea compacto y no contenga puntos críticos distintos de  $p$ . Escojamos  $\epsilon$  de tal manera que  $\varphi(U) \supseteq \{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n: r_1^2 + \dots + r_n^2 \leq 2\epsilon\}$ , y  $0 < \epsilon < \epsilon'$  y sea  $e^\lambda = \{m \in U: x^1(m)^2 + \dots + x^\lambda(m)^2 \leq \epsilon \text{ y } x^{\lambda+1}(m) = \dots = x^n(m) = 0\}$ .

Es claro que  $e^\lambda$  es homeomorfo a  $B^\lambda$ , la bola de dimensión  $\lambda$ . Ahora  $e^\lambda \cap M^{C-\epsilon} = \partial e^\lambda$ , puesto que si  $q \in M^{C-\epsilon} \cap e^\lambda$  entonces  $x^1(q)^2 + \dots + x^\lambda(q)^2 \leq \epsilon$ ,  $x^{\lambda+1}(q) = \dots = x^n(q) = 0$  y  $f(q) \leq C - \epsilon$ . Luego, como  $f(q) = C - x^1(q)^2 - \dots - x^\lambda(q)^2 \leq C - \epsilon$  con la desigualdad anterior obtenemos  $x^1(q)^2 + \dots + x^\lambda(q)^2 = \epsilon$ , es decir,  $q \in \partial e^\lambda$ . Ahora si  $q \in \partial e^\lambda$  es fácil ver que  $q \in e^\lambda \cap M^{C-\epsilon}$ .

Esto demuestra que  $e^\lambda$  está pegado a  $M^{C-\epsilon}$  por el borde y mediante la inclusión  $i: e^\lambda \rightarrow M^{C-\epsilon}$ . Queremos ahora demostrar que  $M^{C-\epsilon} \cup e^\lambda$  es un retracto de deformación de  $M^{C+\epsilon}$ . Sea  $\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave que cumpla lo siguiente (ver figura 1.2.2).

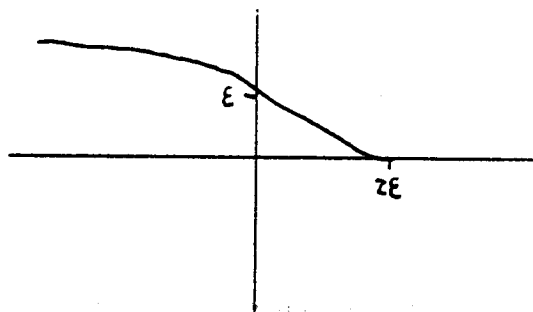


Figura 1.2.2. Un ejemplo de una función  $\mu$

- a)  $\mu(0) > \epsilon$
- b)  $\mu(r) = 0$  para  $r \geq 2\epsilon$
- c)  $-1 < \mu'(r) \leq 0$  para toda  $r$

Y definamos la función  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  así:

$$F(m) = \begin{cases} f(m) & \text{si } m \notin U \\ f(m) - \mu(x_1(m)^2 + \dots + x_\lambda(m)^2 + 2x_{\lambda+1}(m)^2 + \dots + 2x_n(m)^2) & \text{si } m \in U \end{cases}$$

Demostremos que  $F$  es suave: Como  $\varphi(U) \supseteq \{(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n: r_1^2 + \dots + r_n^2 \leq 2\epsilon\} = B$  consideremos el recubrimiento de  $M$  por los abiertos  $U$  y  $M - \varphi^{-1}(B)$ . Ahora  $F$  es suave en  $U$  y  $F|_{M - \varphi^{-1}(B)} = f|_{M - \varphi^{-1}(B)}$ , pues si  $m \in M - \varphi^{-1}(B)$  entonces  $\varphi(m) \notin B$ , luego  $x^1(m)^2 + \dots + x^n(m)^2 > 2\epsilon$  y por lo tanto  $\mu(x^1(m)^2 + \dots + x^\lambda(m)^2 + 2x^{\lambda+1}(m)^2 + \dots + 2x^n(m)^2) = 0$ . Entonces  $F$  es suave en dos abiertos cuya unión es  $M$ . Para simplificar la notación introducimos dos funciones  $g, h: U \rightarrow [0, \infty)$  definidas así:  $g = x_1^2 + \dots + x_\lambda^2$ ,  $h = x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2$ .

El resto de la demostración se descompone en cinco partes.

Primera parte:  $F^{-1}(-\infty, C+\epsilon] = f^{-1}(-\infty, C+\epsilon] = M^{C+\epsilon}$ .

Sea  $m \in f^{-1}(-\infty, C+\epsilon]$ . Si  $m \in M \setminus \varphi^{-1}(B)$  entonces  $F(m) = f(m) \leq C+\epsilon$ , luego  $m \in F^{-1}(-\infty, C+\epsilon]$ . Si  $m \in \varphi^{-1}(B) \subset U$  entonces  $F(m) = f(m) - \mu(g(m) + 2h(m)) \leq f(m)$ , luego  $m \in F^{-1}(-\infty, C+\epsilon]$ . Ahora sea  $m \in F^{-1}(-\infty, C+\epsilon]$ . Si  $g(m) + 2h(m) \geq 2\epsilon$  entonces  $f(m) = F(m) \leq C+\epsilon$ , luego  $m \in f^{-1}(-\infty, C+\epsilon]$ . Si  $g(m) + 2h(m) < 2\epsilon$ , entonces  $\frac{g(m)}{2} + h(m) < \epsilon$  y  $f(m) = C-g+h \leq C + \frac{g}{2} + h \leq C+\epsilon$ , luego  $m \in f^{-1}(-\infty, C+\epsilon]$ .

Segunda parte: Los puntos críticos de  $F$  son los mismos de  $f$ .

Como  $F|_{M \setminus \varphi^{-1}(B)} = f|_{M \setminus \varphi^{-1}(B)}$  entonces  $dF = df$  en  $M \setminus \varphi^{-1}(B)$ . Si  $m \in \varphi^{-1}(B)$  entonces  $dF|_m \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) |_m = df|_m \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) |_m - d\mu|_{g(m)+2h(m)} \left( d(g+2h)|_m \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) |_m \right) = \frac{\partial f}{\partial x^i} |_m - d\mu|_{g(m)+2h(m)} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) |_m (g+2h)|_m \frac{d}{dr} |_{g(m)+2h(m)} = \frac{\partial f}{\partial x^i} |_m - \frac{\partial}{\partial x^i} (g+2h)|_m \mu' |_{g(m)+2h(m)}$ ; luego

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} |_m = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x^i} |_m - 2x_i(m) \mu' & \text{si } 1 \leq i \leq \lambda \\ \frac{\partial f}{\partial x^i} |_m - 4x_i(m) \mu' & \text{si } \lambda < i \leq n \end{cases}$$

y como  $f = C-g+h$  entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \begin{cases} -2x_i(m) (1+\mu') & \text{si } 1 \leq i \leq \lambda \\ 2x_i(m) (1-2\mu') & \text{si } \lambda < i \leq n \end{cases}$$

Ahora

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} |_m = \begin{cases} -2x_i(m) & \text{si } 1 \leq i \leq \lambda \\ 2x_i(m) & \text{si } \lambda < i \leq n \end{cases}$$

luego  $dF|_m = 0$  ssi  $df|_m = 0$ .

Tercera parte:  $F^{-1}(-\infty, C-\epsilon]$  es un retracto de deformación de  $M^{C+\epsilon}$ .

Primero observemos que  $F^{-1}[C-\epsilon, C+\epsilon] \subseteq f^{-1}[C-\epsilon, C+\epsilon]$ , puesto que si  $F(m) \leq C+\epsilon$  entonces  $f(m) \leq C+\epsilon$  por la primera parte; y si  $F(m) \geq C-\epsilon$  entonces como  $f \geq F$  esto implica  $C-\epsilon \leq f(m)$ . Ahora  $F^{-1}[C-\epsilon, C+\epsilon]$  es compacto por lo anterior y no contiene ningún punto crítico, excepto posiblemente a  $p$ . Pero como  $0 = \frac{\partial f}{\partial x^i} |_p = \pm 2x^i(p)$ , entonces  $x^i(p) = 0$  para todo  $i$  y  $\mu(g(p) + 2h(p)) = \mu(0)$  y por lo tanto  $F(p) = C - \mu(0) < C - \epsilon$ . Se sigue que  $p \notin F^{-1}[C-\epsilon, C+\epsilon]$ . Finalmente por el Teorema 1.2.1.  $F^{-1}(-\infty, C-\epsilon]$  es un retracts de deformación de  $F^{-1}(-\infty, C+\epsilon]$  que por la primera parte es lo mismo que  $M^{C+\epsilon}$ .

Cuarta parte: Definamos  $H = \overline{F^{-1}(-\infty, C-\epsilon] - M^{C-\epsilon}}$ , entonces es fácil ver que  $M^{C-\epsilon} \cup H = F^{-1}(-\infty, C-\epsilon]$  (utilizando que  $F \leq f$  en  $M$ ). En esta parte demostramos que  $e^\lambda \subseteq H$ . Sea  $q \in e^\lambda$ , queremos demostrar que para toda vecindad  $U_q$  de  $q$  se tiene  $(F^{-1}(-\infty, C-\epsilon] - M^{C-\epsilon}) \cap U_q \neq \emptyset$ . Sea  $q' \in U_q \cap (e^\lambda - \delta^\lambda)$  entonces se cumple que  $g(q') < \epsilon$  y  $h(q') = 0$ , luego  $f(q') = C - g(q') > C - \epsilon$ ; y por otro lado  $F(q') = f(q') - \mu(g(q')) = C - g(q') - \mu(g(q'))$ . Pero como  $-1 < \mu'$  entonces  $-1 < \frac{\mu(g(q')) - \mu(0)}{g(q')}$ , por lo tanto  $-g(q') - \mu(g(q')) < -\mu(0)$  y se tiene que  $F(q') < C - \mu(0) < C - \epsilon$  luego  $q' \in U_q \cap (F^{-1}(-\infty, C-\epsilon] - F^{-1}(-\infty, C-\epsilon])$ .

Quinta parte:  $M^{C-\epsilon} \cup e^\lambda$  es un retracts de deformación de  $M^{C-\epsilon} \cup H$ . Definamos  $\gamma: [0,1] \times M^{C-\epsilon} \cup H \rightarrow M^{C-\epsilon} \cup H$  así:

$$\gamma(t, m) \begin{cases} m & \text{si } m \notin U \\ \varphi^{-1}(x^1(m), \dots, x^\lambda(m), tx^{\lambda+1}(m), \dots, tx^N(m)) & \text{si } g(m) \leq \epsilon \\ \varphi^{-1}(x^1(m), \dots, x^\lambda(m), S_t x^{\lambda+1}(m), \dots, S_t x^N(m)) & \text{si } \epsilon < g(m) \leq h(m) + \epsilon, \text{ donde} \\ & S_t = t + (1-t) \sqrt{\frac{g(m) - \epsilon}{h(m)}} \\ m & \text{si } h(m) + \epsilon < g(m) \end{cases}$$



Primero demostremos que  $\gamma([0,1] \times M^{C-\epsilon} \cup H) \subseteq M^{C-\epsilon} \cup H$ . Recordemos que  $M^{C-\epsilon} \cup H = F^{-1}(-\infty, C-\epsilon]$  (parte cuatro). Sea  $m \in F^{-1}(-\infty, C-\epsilon]$  y supongamos que  $m \in U$ ,  $\gamma(t,m) = \varphi^{-1}(x^1(m), \dots, x^\lambda(m), tx^{\lambda+1}(m), \dots, tx^n(m))$  entonces  $F(\varphi^{-1}(x^1(m), \dots, x^\lambda(m), tx^{\lambda+1}(m), \dots, tx^n(m))) = C-g(m) + t^2 h(m) - \mu(g(m) + 2t^2 h(m))$ . Definamos la función  $\alpha(t) = C-g(m) + t^2 h(m) - \mu(g(m) + 2t^2 h(m))$  para  $t \in [0,1]$ , y calculemos su derivada:  $\alpha'(t) = 2t h(m) - \mu'(g(m) + 2t^2 h(m)) 4t h(m)$ . Como  $\mu' \leq 0$  entonces  $\alpha'(t) \geq 0$  y sabemos que  $\alpha(1) \leq C-\epsilon$ , esto implica que  $\alpha(t) \leq C-\epsilon$  para  $t \in [0,1]$  que era lo que queríamos demostrar. El caso en que  $\gamma(t,m) = \varphi^{-1}(x^1(m), \dots, x^\lambda(m), S_t x^{\lambda+1}(m), \dots, S_t x^n(m))$  se hace igual; basta observar que  $0 < S_t \leq 1$ . Ahora es claro que  $\gamma(1, \cdot) = \text{identidad}$  y probemos que  $\gamma(0, M^{C-\epsilon} \cup H) \subseteq M^{C-\epsilon} \cup e^\lambda$ . Sea  $m \in F^{-1}(-\infty, C-\epsilon]$ . Si  $m \notin U$  entonces  $\gamma(0,m) = m$ , pero como  $F(m) = f(m)$  en este caso, se sigue que  $f(m) \leq C-\epsilon$ , es decir  $m \in M^{C-\epsilon} \cup e^\lambda$ . Si  $m \in U$  y  $g(m) \leq \epsilon$ , es claro que  $\gamma(0,m) \in M^{C-\epsilon} \cup e^\lambda$ . Si  $m \in U$  y  $\epsilon < g(m) \leq h(m) + \epsilon$  entonces  $\gamma(0,m) = \varphi^{-1}(x^1(m), \dots, x^\lambda(m), S_0 x^{\lambda+1}(m), \dots, S_0 x^n(m))$ , donde  $S_0 = \sqrt{\frac{g(m)-\epsilon}{h(m)}}$  y tenemos que  $f(\gamma(0,m)) = C-g(m) + S_0^2 h(m) = C-\epsilon$ , luego  $\gamma(0,m) \in M^{C-\epsilon} \cup e^\lambda$ . Por último el caso en que  $m \in U$ ,  $h(m) + \epsilon < g(m)$  y  $\gamma(0,m) = m$  es obvio.

Solamente falta verificar que  $\gamma(0,m) = m$  para todo  $m \in M^{C-\epsilon} \cup e^\lambda$ , y que  $\gamma$  es continua. Lo primero es fácil. Para la continuidad observemos que si  $g(m) \rightarrow \epsilon$  y  $h(m) \rightarrow 0$ , entonces la función  $S_t x^{\lambda+k}(m)$ , donde  $1 \leq k \leq n-\lambda$ , tiende a  $t x^{\lambda+k}(m)$ , pues  $S_t x^{\lambda+k}(m) = \left( t + (1-t) \sqrt{\frac{g(m)-\epsilon}{h(m)}} \right) x^{\lambda+k}(m)$

$$= t + (1-t) \frac{g(m)-\epsilon}{\sqrt{\frac{x^{\lambda+1}(m)^2}{x^{\lambda+k}(m)^2} + \dots + 1 + \dots + \frac{x^n(m)^2}{x^{\lambda+k}(m)^2}}}$$

de donde es claro que  $S_t x^{\lambda+k}(m) \rightarrow t x^{\lambda+k}(m)$  si  $g(m) \rightarrow \epsilon$  y  $h(m) \rightarrow 0$ .  $\square$

Nota: Si existen  $k$  puntos críticos:  $p_1, \dots, p_k$  en  $f^{-1}(c)$ , con  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  sus respectivos índices, entonces es claro que  $M^{c+\epsilon}$  tiene el mismo tipo de homotopía que  $M^{c-\epsilon} \cup e^{\lambda_1} \cup \dots \cup e^{\lambda_k}$

### 1.3. CW-Complejos.

Los CW complejos son una generalización de los complejos simpliciales y su importancia radica en la posibilidad de calcularles su homología. Usualmente es más fácil describir un espacio como un CW-complejo que como un complejo simplicial. Nuestro objetivo es mostrar como se puede expresar una variedad como un CW-complejo, con la ayuda de una función de Morse.

**1.3.1 Definición.** Sean  $X, Y$  espacios topológicos disyuntos,  $A$  un subconjunto cerrado de  $X$  y  $f: A \rightarrow Y$  una función continua. Sea  $X \cup Y$  la suma topológica de estos espacios y formemos el espacio cociente  $X \cup_f Y$  que se obtiene de  $X \cup Y$  haciendo las siguientes identificaciones:  $y$  se identifica con  $f^{-1}(y)$  para cada  $y \in Y$ . El espacio  $X \cup_f Y$  se dice que se obtiene pegando  $X$  a  $Y$  con  $f$ . Es fácil ver que  $Y$  es homeomorfo a un subespacio cerrado de  $X \cup_f Y$ .

Una  $m$ -celda es un espacio homeomorfo a  $B^m = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ . Denotaremos por  $\dot{B}^m$  a la frontera de  $B^m$  y por  $\text{Int } B^m$  al interior de  $B^m$ . Una  $m$ -celda abierta será un espacio homeomorfo a  $\text{Int } B^m$ .

**1.3.2 Definición.** Un CW-complejo es un espacio topológico  $X$ , junto con una colección de celdas abiertas disyuntas  $\{e_\alpha\}$  tales que  $X = \cup e_\alpha$  y que se cumpla:

a)  $X$  es de Hausdorff.

b) Para cada  $m$ -celda abierta  $e_\alpha$  de la colección, existe una función  $f_\alpha: B^m \rightarrow X$  continua tal que  $f|_{\text{Int } B^m}$  es un homeomorfismo sobre  $e_\alpha$  y  $f(\dot{B}^m)$  está contenido en una unión finita de celdas

abiertas, cada una de dimensión menor que  $m$ .

c)  $A$  es cerrado en  $X$  si  $A \cap \bar{e}_\alpha$  es cerrado en  $\bar{e}_\alpha$  para cada  $\alpha$ .

Sean  $(X, \{e_\alpha\})$  un CW-complejo (en lo que sigue, pondremos  $X$  simplemente) y  $Y \subseteq X$  un subespacio que es igual a una unión de celdas abiertas  $e_\alpha$  y tal que si  $e_\alpha \subseteq Y$  entonces  $\bar{e}_\alpha \subseteq Y$ , donde  $\bar{e}_\alpha$  denota la clausura de  $e_\alpha$  en  $X$ . En este caso  $Y$  es un CW-complejo cerrado en  $X$  y se llama un subcomplejo de  $X$ . Si  $X^P$  denota la unión de los  $e_\alpha$  tales que su dimensión es a lo más  $P$ , entonces  $X^P$  es un subcomplejo de  $X$ , llamado el  $P$ -esqueleto de  $X$ . Se dice que  $X$  es finito si el número de celdas  $e_\alpha$  es finito. La dimensión de un CW-complejo es la dimensión más grande de una celda, si existe, en caso contrario decimos que es de dimensión infinita.

**Ejemplo 1.** El Toro se puede expresar como un CW-complejo con cuatro celdas abiertas  $e_1, e_2, e_3, e_4$  de dimensiones 0, 1, 1 y 2 respectivamente (ver figura 1.3.1).

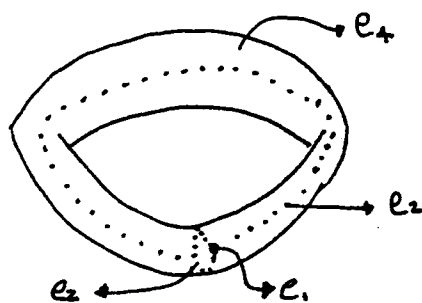


Figura 1.3.1 Descomposición del Toro como un CW-complejo.

**Ejemplo 2.**  $B^n$  es un CW-complejo de tres celdas abiertas:  $e_1, e_2$  y  $e_3$  de dimensiones  $n, n-1$  y 0 respectivamente (ver figura 1.3.2). Este ejemplo es muy sencillo, pero más tarde lo usaremos.

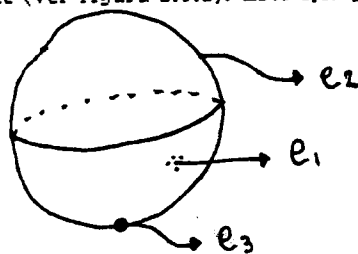


Figura 1.3.2

Los dos teoremas siguientes describen la geometría y topología de los CW-complejos, pero sólo los utilizaremos en la sección 1.5.

1.3.3 **Teorema** ([Mu]; Teorema 38.2). Sea  $X$  un CW-complejo de dimensión  $P > 0$ . Entonces  $X$  es homeomorfo a  $X^{P-1} \cup_f \sum B_\alpha$ , donde  $\sum B_\alpha$  es una suma topológica de  $P$ -bolas, una por cada celda abierta de dimensión  $P$  de  $X$ , y  $f: \sum B_\alpha \rightarrow X^{P-1}$  es una función continua. Esto implica que  $X$  es normal ([Mu], Teorema 37.2).

1.3.4 **Teorema** ([Mu], Teorema 38.3) Sea  $X$  un CW-complejo. Entonces  $X^P$  es un subespacio cerrado de  $X^{P+1}$  y  $X$  es la unión coherente de los espacios  $X^0 \subseteq X^1 \subseteq \dots$  (Es decir la topología de  $X$  satisface:  $U \subseteq X$  es abierto en  $X$  ssi  $U \cap X^P$  es abierto en  $X^P$  para cada  $P$ ). Se sigue que  $X$  es normal ([Mu], Teorema 37.4).

La definición siguiente trata sobre aplicaciones celulares entre CW-complejos y juegan un papel similar a las aplicaciones simpliciales entre complejos simpliciales.

1.3.5 **Definición:** Sean  $X$  y  $Y$  CW-complejos. Una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  se llama celular si  $f(X^P) \subseteq Y^P$  para cada  $P$ .

1.3.6 **Teorema** ([Wh], Teorema 4.3, página 77). Sean  $X, Y$  CW-complejos,  $A$  un subcomplejo de  $X$  y  $f: A \rightarrow Y$  una aplicación celular continua. Entonces  $X \cup_f Y$  es un CW-complejo que tiene a  $Y$  como subcomplejo.

1.3.7 **Teorema** ([Wh], página 77) Sean  $X, Y$  CW-Complejos y  $f: X \rightarrow Y$  una función continua. Entonces  $f$  es homótopa a una aplicación celular continua entre  $X$  y  $Y$ .

#### 1.4. CW-Complejos y Puntos Críticos

El objetivo de esta sección es probar el Teorema 1.4.4, que describe una variedad como un CW-complejo, en términos de los puntos críticos de una función de Morse. Pero antes necesitamos algunos lemas.

1.4.1 Lema. Sean  $X$  un espacio topológico y  $\varphi_0, \varphi_1: \dot{e}^\lambda \rightarrow X$  dos aplicaciones homótopas. Entonces la identidad de  $X$  se extiende a una equivalencia homotópica  $k: XU_{\varphi_0} e^\lambda \rightarrow XU_{\varphi_1} e^\lambda$  (recordemos que  $X$  es homeomorfo a un subespacio cerrado de  $XU_{\varphi_0} e^\lambda$ ).

Demostración: Definamos  $k$  por las siguientes fórmulas:

$$k(x) = x \quad \text{si } x \in X$$

$$k(tU) = 2tU \quad \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, U \in \dot{e}^\lambda$$

$$k(tU) = \varphi_{2-2t}(U) \quad \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, U \in \dot{e}^\lambda$$

Donde hemos tomado  $\dot{e}^\lambda = S^{\lambda-1}$

(Recordemos que  $XU_{\varphi_0} e^\lambda$  se puede ver como una partición de la suma topológica  $XUe^\lambda$  con la topología cociente. La partición sería:  $\{x\}$ , si  $x \in XUe^\lambda - \varphi_0(\dot{e}^\lambda)$ , y  $\{x\} \cup \varphi_0^{-1}(x)$  en otro caso.

Utilizamos  $[x]$  para denotar el conjunto al cual  $x$  pertenece en una partición. De acuerdo a esto la forma correcta de definir  $k$  sería por ejemplo:  $k([tU]) = [2tU]$ , pero omitiremos los corchetes).

Definimos  $L: XU_{\varphi_1} e^\lambda \rightarrow XU_{\varphi_0} e^\lambda$  por las siguientes fórmulas:

$$L(x) = x \quad \text{si } x \in X$$

$$L(tU) = 2tU \quad \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, U \in \dot{e}^\lambda$$

$$L(tU) = \varphi_{2t-1}(U) \quad \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, U \in \dot{e}^\lambda$$

Ahora queremos demostrar que  $Lok: XU_{\varphi_0} e^\lambda \rightarrow XU_{\varphi_0} e^\lambda$  es homótopa a la identidad (se hace igual para  $koL$ ). Calculemos  $Lok$ : sea  $U \in \dot{e}^\lambda$  entonces:

$$\begin{aligned} \text{Lok}(X) &= x && \text{si } x \in X \\ \text{Lok}(tU) &= L(2tU) = 4tU && \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{4} \\ \text{Lok}(tU) &= L(2tU) = \varphi_{4t-1} && \text{si } \frac{1}{4} < t \leq \frac{1}{2} \\ \text{Lok}(tU) &= L(\varphi_{2-2t}(U)) = \varphi_{2-2t}(U) && \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

Definamos ahora la función  $h: [0,1] \times X \cup_{\varphi_0} e^\lambda \rightarrow X \cup_{\varphi_0} e^\lambda$  como (ver [Wh.J]<sub>2</sub> página 68):

$$\begin{aligned} h(t,x) &= x && \text{si } x \in X \\ h(t,rU) &= (4-3t)rU && \text{si } 0 \leq r \leq \frac{1}{4-3t}, \quad U \in e^\lambda \\ h(t,rU) &= \varphi_{(4-3t)r-1}(U) && \text{si } \frac{1}{4-3t} \leq r \leq \frac{2-t}{4-3t}, \quad U \in e^\lambda \\ h(t,rU) &= \varphi_{\frac{1}{2}(4-3t)(1-r)}(U) && \text{si } \frac{2-t}{4-3t} \leq r \leq 1, \quad U \in e^\lambda \end{aligned}$$

Es fácil verificar que  $h$  es una homotopía entre  $\text{Lok}$  y la identidad.  $\square$

1.4.2 Lema. Sean  $X, Y$  espacios topológicos y  $F: X \rightarrow Y$  una aplicación continua. Supongamos que  $F$  tiene una inversa homotópica por la izquierda,  $L$ , y una inversa homotópica por la derecha,  $R$ . Entonces  $F$  es una equivalencia y  $R$  y  $L$  son inversas homotópicas de  $F$ .

Demostración: Utilizamos  $\simeq$  para indicar que dos funciones son homotópicas. Ahora las hipótesis del lema son  $LF \simeq \text{id}$ ,  $FR \simeq \text{id}$  luego  $L \simeq L(FR) = (LF)R \simeq R$ . Utilizando la relación  $LF \simeq \text{id}$  obtenemos que  $RF \simeq \text{id}$  y por lo tanto  $R$  es una inversa homotópica de  $F$ . De igual manera obtenemos  $FL \simeq \text{id}$ , luego  $L$  es una inversa homotópica de  $F$ .  $\square$

1.4.3 Lema. Sean  $X$  un espacio topológico,  $\varphi: e^\lambda \rightarrow X$  una aplicación continua y  $f: X \rightarrow Y$  una equivalencia. Entonces  $f$  se extiende a una equivalencia  $F: X \cup_{\varphi} e^\lambda \rightarrow Y \cup_{f \circ \varphi} e^\lambda$ .

Demostración: Definimos  $F$  por la siguiente fórmula

$$F(m) = \begin{cases} f(m) & \text{si } m \in X \\ m & \text{si } m \in e^\lambda \end{cases}$$

Sea  $g$  una inversa homotópica de  $f$  y definamos  $G: YU_{f\varphi}e^\lambda \rightarrow XU_{gf\varphi}e^\lambda$  de la siguiente forma

$$G(m) = \begin{cases} g(m) & \text{si } m \in Y \\ m & \text{si } m \in e^\lambda \end{cases}$$

Ahora puesto que  $g \circ f \circ \varphi$  es homotopa a  $\varphi$  entonces existe una equivalencia  $K: XU_{gf\varphi}e^\lambda \rightarrow XU_\varphi e^\lambda$  explícitamente definida en el lema 1.4.1. Es decir tenemos las siguientes aplicaciones

$$\begin{array}{ccccc} YU_{f\varphi}e^\lambda & \xrightarrow{G} & YU_{gf\varphi}e^\lambda & \xrightarrow{K} & XU_\varphi e^\lambda \\ & & \searrow & \swarrow & \\ & & & F & \end{array}$$

Primero demostramos que  $KGF: XU_\varphi e^\lambda \rightarrow XU_\varphi e^\lambda$  es una equivalencia. Sea  $h_t$  una homotopía entre  $gf$  y la identidad, y calculemos  $KGF$  teniendo en cuenta la forma en que está definida  $K$  en el lema 1.4.1:

Sea  $U \in e^\lambda$ , entonces

Si  $x \in X$ ,  $KGF(x) = Kgf(x) = gf(x)$ , porque  $K|x = \text{id}$ .

Si  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ ,  $KGF(tU) = K(tU) = 2tU$ , porque  $G|e^\lambda = F|e^\lambda = \text{id}$ .

Si  $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ ,  $KGF(tU) = K(tU) = h_{2-2t}(\varphi(U))$  porque si  $h_t$  es la homotopía entre  $gf$  y la identidad entonces  $h_t \circ \varphi$  es la homotopía entre  $gf\varphi$  y  $\varphi$ .

La homotopía  $q_\tau: XU_\varphi e^\lambda \rightarrow XU_\varphi e^\lambda$  entre  $KGF$  y la identidad se define así:

$$q_\tau(x) = h_\tau(x) \text{ si } x \in X$$

$$q_\tau(tU) = \frac{2}{1+\tau} tU \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1+\tau}{2}, U \in e^\lambda$$

$$q_\tau(tU) = h_{2-2t+\tau}(\varphi(U)) \text{ si } \frac{1+\tau}{2} \leq t \leq 1, U \in e^\lambda$$

Luego  $F$  tiene una inversa homotópica por la izquierda. Una prueba similar muestra que  $G$  tiene una inversa homotópica por la izquierda. Luego como  $K(GF) \simeq \text{id}$  y  $K$  es una equivalencia, entonces por el lema 1.4.2,  $(GF)K \simeq \text{id} \simeq G(FK)$ . Ahora como  $G$  tiene una inversa homotópica por la izquierda, entonces  $(FK)G \simeq \text{id} \simeq F(KG)$ ; pero sabemos que  $(KG)F \simeq \text{id}$ , luego  $F$  es una equivalencia.

**1.4.4. Teorema** Sean  $M$  una variedad diferenciable,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse tal que  $M^a$  sea compacto para cada  $a \in \mathbb{R}$ . Entonces  $M$  tiene el tipo de homotopía de un CW-Complejo, con una  $\lambda$ -celda abierta por cada punto crítico de índice  $\lambda$ .

Demostración: Como los puntos críticos de  $f$  son aislados y  $M$  tiene una base enumerable, entonces los puntos críticos son enumerables  $f$  tiene un mínimo porque  $M^a$  es compacto. Sean  $C_1 < C_2 < \dots$  los valores críticos de  $f$ . La sucesión  $\{C_i\}$  no tiene puntos de acumulación: si lo tuviera, algún  $M^a$  tendría infinitos puntos críticos y como  $M^a$  es compacto entonces los puntos críticos tendrían un punto de acumulación, contrario al hecho de que los puntos críticos de  $f$  son aislados. Supongamos  $a_i \neq C_i$  para toda  $i$ , y que  $M^{a_i}$  tiene el mismo tipo de homotopía de un CW-complejo ( $M^a$  es vacío para ciertos  $a \in \mathbb{R}$ ). Sea  $C$  el menor  $C_i$  tal que  $C_i > a_i$ . Ahora para  $\epsilon$  suficientemente pequeño, por el Teorema 1.2.3  $M^{C+\epsilon}$  tiene el mismo tipo de homotopía que  $M^{C-\epsilon} \cup_{\varphi_1} e^{\lambda_1} U \dots \cup_{\varphi_\alpha} e^{\lambda_\alpha}$  para ciertas aplicaciones  $\varphi_i: e^{\lambda_i} \rightarrow M^{C-\epsilon}$ . Por el Teorema 1.2.1 existe una equivalencia  $h': M^{C-\epsilon} \rightarrow M^{a_1}$  y por hipótesis existe una equivalencia  $h'': M^{a_1} \rightarrow k_1$  donde  $k_1$  es un CW-complejo. En conclusión tenemos:  $M^{C-\epsilon} \xrightarrow{h} M^{a_1} \xrightarrow{h''} k_1$ , luego  $h'' \circ h'$ :  $M^{C-\epsilon} \rightarrow k_1$  es una equivalencia. Por el lema 1.4.3  $h'' \circ h'$  se extiende a una homotopía  $\tilde{k}: M^{C-\epsilon} \cup_{\varphi_1} e^{\lambda_1} \rightarrow k_1 \cup_{h' \circ \varphi_1} e^{\lambda_1}$ . Si aplicamos el lema  $\alpha$ -veces se obtiene una equivalencia  $\tilde{k}: M^{C-\epsilon} \cup_{\varphi_1} e^{\lambda_1} U \dots \cup_{\varphi_\alpha} e^{\lambda_\alpha} \rightarrow k_1 \cup_{\psi_1} e^{\lambda_1} U \dots \cup_{\psi_\alpha} e^{\lambda_\alpha}$ , donde  $\psi_i = h' \circ \varphi_i$ . (Es claro que no importa en que orden se peguen las celdas a  $M^{C-\epsilon}$ , porque los puntos críticos son aislados).



Ahora cada  $\psi_i: \mathbb{E}^{\lambda_i} \rightarrow k_1$  es homótopa a una aplicación celular  $\tilde{\psi}_i: \mathbb{E}^{\lambda_i} \rightarrow k_1$  por el Teorema 1.3.7, luego por el lema 1.4.1  $k_1 \cup \psi_1 \mathbb{E}^{\lambda_1} \cup \dots \cup \psi_\alpha \mathbb{E}^{\lambda_\alpha}$  tiene el mismo tipo de homotopía de  $k_1 \cup \tilde{\psi}_1 \mathbb{E}^{\lambda_1} \cup \dots \cup \tilde{\psi}_\alpha \mathbb{E}^{\lambda_\alpha}$  y como las  $\tilde{\psi}_i$  son aplicaciones celulares, entonces por el Teorema 1.3.6  $k_2 = k_1 \cup \tilde{\psi}_1 \mathbb{E}^{\lambda_1} \cup \dots \cup \tilde{\psi}_\alpha \mathbb{E}^{\lambda_\alpha}$  es un CW-complejo. Y por lo tanto  $M^{C+\epsilon}$  tiene el mismo tipo de homotopía que un CW-complejo. Se sigue que  $M^a$  tiene el mismo tipo de homotopía de un CW-complejo para cada  $a \in \mathbb{R}$ .

Ahora si  $M$  es compacto esto completa la prueba, pues  $M = M^a$  para un  $a$  suficientemente grande. Si  $M$  no es compacto pero hay finitos puntos críticos, entonces todos están en algún  $M^a$ , que es un retracto de deformación de  $M$  por el Teorema 1.2.1.

Si existen infinitos puntos críticos entonces tenemos una sucesión infinita de equivalencias homotópicas  $f_i$ , cada una extendiendo a la anterior (lema 1.4.1):

$$\begin{array}{ccccccc} M^{a_1} & \subset & M^{a_2} & \subset & M^{a_3} & \subset & \dots \\ f_1 \uparrow & & f_2 \uparrow & & f_3 \uparrow & & \\ k_1 & \subset & k_2 & \subset & k_3 & \subset & \dots \end{array}$$

Sea  $k$  la unión coherente de los espacios  $k_i$  (es decir  $k = \bigcup_{i=1}^{\infty} k_i$ , con la topología:  $U \subseteq k$  es abierto en  $k$  ssi  $U \cap k_i$  es abierto en  $k_i$  para cada  $i$ . No es difícil ver que  $k$  es un CW-complejo) y sea  $\bar{f}: k \rightarrow M$  definida por  $\bar{f}(m) = f_n(m)$  si  $m \in k_n$ . Puesto que  $k$  tiene la topología coherente con los espacios  $\{k_i\}$ , entonces  $\bar{f}$  es continua. En el Apéndice IV mostramos porque  $\bar{f}$  es una equivalencia homotópica.  $\square$

**Ejemplo 1** Utilizando los ejemplos 3,4, y 5 de la sección 1.1, vemos que estos espacios tienen este tipo de homotopía: El Toro tiene el mismo tipo de homotopía que un CW-complejo con cuatro celdas abiertas:  $e_0, e_1, e_2, e_3$  de dimensiones 0,1,1 y 2 respectivamente. La Botella de Klein tiene el tipo de homotopía de un CW-complejo con cuatro celdas abiertas, como el toro. Sin embargo esto no quiere decir que la Botella de Klein y el Toro sean homotópicamente equivalentes. Por último el espacio proyectivo real de dimensión  $n$ , tiene el tipo de homotopía de un CW-complejo con  $n+1$  celdas abiertas:  $e_0, e_1, \dots, e_n$  de dimensiones  $0,1, \dots, n$  respectivamente.

### 1.5. Homología de un CW-Complejo

En esta sección introducimos los módulos de homología de una variedad y mostramos su relación con los puntos críticos de una función. Los conceptos y resultados de Topología Algebraica que utilizemos se encuentran en [Mu].

Un par admisible de espacios topológicos  $(X,A)$  es una pareja ordenada formada por un espacio topológico  $X$  y un subespacio  $A$  de  $X$ . Dados  $(X,A)$  y  $(Y,B)$  pares admisibles de espacios topológicos, una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  tal que  $f(A) \subset B$  la denotamos por  $f: (X,A) \rightarrow (Y,B)$ .

**1.5.1 Definición.** Sean  $(X,A)$  un par admisible de espacios topológicos y  $p$  un entero no-negativo.

Denotamos por  $S_p(X)$  al espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  generado por todos los  $p$ -simplejos singulares sobre  $X$ , y por  $S_p(X,A)$  al cociente  $S_p(X)/S_p(A)$ . Para cada  $p$  sea  $\partial_p: S_p(X,A) \rightarrow S_{p-1}(X,A)$  el operador de frontera ([Mu], página 163) y definamos los siguientes subespacios de  $S_p(X,A)$ :

El espacio de  $p$ -ciclos de  $(X,A)$ ,  $Z_p(X,A) = \text{Kernel}(\partial_p)$  y el espacio de  $p$ -fronteras de  $(X,A)$ ;  $B_p(X,A) = \text{Imágen}(\partial_{p+1})$ . Puesto que  $\partial_p \partial_{p+1} = 0$ , podemos definir el espacio  $H_p(X,A) = Z_p(X,A)/B_p(X,A)$ , llamado el  $p$ -ésimo módulo de homología singular del par  $(X,A)$  con

coeficientes en  $\mathbb{R}$ . Si  $A = \emptyset$  escribimos simplemente  $H_p(X)$ .

1.5.2 Definición. Sean  $(X,A)$ ,  $(Y,B)$  pares admisibles de espacios topológicos y  $f: (X,A) \rightarrow (Y,B)$  una función continua. Para cada  $P$  entero no negativo, denotamos por  $f_{p*}$  al homomorfismo inducido por  $f$  entre  $H_p(X,A)$  y  $H_p(Y,B)$ .

1.5.3 Definición. Sea  $(X,A)$  un par admisible de espacios topológicos. Para cada entero no negativo  $p$ , definiremos un homomorfismo  $\partial_p : H_p(X,A) \rightarrow H_{p-1}(A)$ , llamado el homomorfismo frontera de la homología: sea  $z$  un  $p$ -ciclo de  $(X,A)$ , entonces  $z$  es igual a la clase de equivalencia módulo  $S_p(A)$  de un  $z' \in S_p(X)$ , tal que  $\partial_p(z') \in S_{p-1}(A)$ . Ahora  $\partial_p(z') \in S_{p-1}(A)$  y si denotamos por  $z + \mathcal{B}_p(X,A)$  la clase de  $z$  en  $H_p(X,A)$ , y por  $\partial_p(z') + \mathcal{B}_{p-1}(A)$  la clase de  $\partial_p(z')$  en  $H_{p-1}(A)$ , entonces  $\partial_{p*} (z + \mathcal{B}_p(X,A)) = \partial_p(z') + \mathcal{B}_{p-1}(A)$ . Es claro que  $\partial_{p*}$  está bien definido.

1.5.4 Definición. Sean  $X$  un CW-complejo y  $D_p(X) = H_p(X^p, X^{p-1})$ . Para cada entero no negativo  $p$ , definiremos un homomorfismo  $\bar{\partial}_p : D_p(X) \rightarrow D_{p-1}(X)$  por la siguiente composición:

$$D_p(X) = H_p(X^p, X^{p-1}) \xrightarrow{j_{p*}} H_{p-1}(X^{p-1}) \xrightarrow{i_{p*}} H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2}) = D_{p-1}(X)$$

donde  $j_{p*}$  es el homomorfismo inducido por la inclusión  $j: (X^{p-1}, \emptyset) \rightarrow (X^{p-1}, X^{p-2})$ . ( $D_{-1} \equiv 0$ ).

1.5.5 Lema. El operador  $\bar{\partial}_p$  de la definición 1.5.4 satisface  $\bar{\partial}_{p-1} \circ \bar{\partial}_p = 0$  para toda  $p$ .

Demostración: Basta probar que  $\partial_{p-1*} \circ j_{p*} : H_{p-1}(X^{p-1}) \rightarrow H_{p-2}(X^{p-2})$  es el homomorfismo nulo. Sea  $z \in Z_{p-1}(X^{p-1})$ , entonces  $j_{p*}(z + \mathcal{B}_{p-1}(X^{p-1}))$  es igual a la clase de  $z + S_{p-1}(X^{p-2})$  en  $H_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2})$  (es decir módulo  $\mathcal{B}_{p-1}(X^{p-1}, X^{p-2})$ ). Denotemos esta clase por  $[z + S_{p-1}(X^{p-2})]$ .

Ahora  $\partial_{p-1}([z + S_{p-1}(X^{p-2})]) = \partial z + B_{p-2}(X^{p-2}) = B_{p-2}(X^{p-2})$ , pero  $B_{p-2}(X^{p-2})$  es el cero de  $H_{p-2}(X^{p-2})$ .  $\square$

**1.5.6 Definición.** Un complejo de cadenas  $C$  es una familia  $\{C_p, \partial_p\}_{p \in \mathbb{Z}}$  de espacios vectoriales  $C_p$  sobre  $\mathbb{R}$  y de homomorfismos  $\partial_p: C_p \rightarrow C_{p-1}$ , tales que  $\partial_p \circ \partial_{p+1} = 0$  para todo  $p$ . ( $C_{-1} \equiv 0$ )

Si  $C_p = 0$  para  $p < 0$ , decimos que el complejo es no-negativa y definimos el  $p$ -ésimo grupo de homología del complejo  $C$  como  $H_p(C) = \text{Kernel}(\partial_p) / \text{Imágen}(\partial_{p+1})$ .

**Ejemplo 1** Con la notación de la definición 1.5.1,  $\delta(X, A) = \{S_p(X, A), \partial_p\}$  es un complejo de cadenas no-negativa llamado el complejo de cadenas singular de  $(X, A)$  y  $H_p(\delta) = H_p(X, A)$ .

**Ejemplo 2.** Con la notación de la definición 1.5.4,  $\mathfrak{D}(X) = \{D_p(X), \partial_p\}$  es un complejo de cadenas no negativo, llamado el complejo de cadenas celulares de  $X$ .

La importancia de esta cadena  $\mathfrak{D}(X)$  es el siguiente:

**1.5.7 Teorema.** ([Mu], página 225 y 311). Existe un isomorfismo entre  $H_p(\delta(x))$  y  $H_p(\mathfrak{D}(x))$  para toda  $p$ .

Sea  $X$  un CW-complejo de dimensión  $p$ . Entonces por el Teorema 3.3,  $X$  se puede expresar como un cociente de la forma  $\Pi: X^{p-1} \cup \Sigma B_\alpha \rightarrow X$  donde  $\Pi$  hace las identificaciones que determina la función  $f$  del Teorema 1.3.3.

**1.5.8 Lema** ([Mu], página 223) Con la notación anterior,  $\Pi$  induce un isomorfismo entre  $H_i(\Sigma B_\alpha, \Sigma B_\alpha)$  y  $H_i(X^p, X^{p-1})$  para toda  $i$  (ver Definición 1.5.2.).

1.5.9 Lema Sea  $X$  un CW-complejo. Entonces  $H_i(X^P, X^{P-1}) = 0$  si  $i \neq p$  y  $H_i(X^P, X^{P-1}) = \bigoplus_{\mathbb{C}} \mathbb{R}$ , donde  $\mathbb{C}$  es el cardinal del conjunto de  $p$ -celdas abiertas de  $X$ .

Demostración: Por el lema anterior,

$H_i(X^P, X^{P-1})$  y  $H_i(\Sigma B_\alpha, \Sigma \dot{B}_\alpha)$  son isomorfos, donde cada  $B_\alpha$  es una  $p$ -celda, y en la suma  $\Sigma B_\alpha$  hay tantos  $B_\alpha$  como  $p$ -celdas tiene  $X$ . Ahora los  $B_\alpha$  son abiertos disyuntos en  $\Sigma B_\alpha$ , entonces

$H_i(\Sigma B_\alpha, \Sigma \dot{B}_\alpha)$  es isomorfo a  $\bigoplus_{\mathbb{C}} H_i(B_\alpha, \dot{B}_\alpha)$  y

$$H_i(B_\alpha, \dot{B}_\alpha) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } i = p \\ 0 & \text{si } i \neq p \end{cases} \quad \square$$

### 1.6. Desigualdades de Morse.

Sea  $\mathbb{C} = \{C_r, \partial_r\}$  un complejo de cadenas, no negativo, de espacios vectoriales de dimensión finita (es decir, cada  $C_r$  es un espacio vectorial de dimensión finita). Sea  $\gamma_r = \dim(C_r)$  y  $\beta_r = \dim(\partial_r(C_r))$ , y definamos los siguientes polinomios:  $\gamma(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \gamma_r t^r$ ,  $\beta(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \beta_r t^r$ .

1.6.1 Lema. Con la misma notación anterior, existe un polinomio  $\alpha(t)$  con coeficientes enteros no negativos tal que  $\gamma(t) = \beta(t) + (1+t)\alpha(t)$ .

Demostración: Dados  $V$  un espacio vectorial y  $H$  un subespacio de  $V$ , siempre se cumple que  $\dim(V) = \dim(V/H) + \dim(H)$ . Sean  $Z_r = \text{Kernel}(\partial_r)$  y  $B_r = \text{Imagen}(\partial_{r+1})$  y apliquemos lo anterior a los siguientes espacios:  $C_r \supset Z_r \supset B_r$  obteniendo:

$$\gamma_r = \dim(C_r/Z_r) + \dim(Z_r) = \dim(C_r/Z_r) + \beta_r + \dim(B_r).$$

Ahora consideremos el siguiente epimorfismo  $\theta_r: C_r \rightarrow B_{r-1}$ , con Kernel  $Z_r$ . Entonces  $C_r/Z_r$  es isomorfo a  $B_{r-1}$ , luego  $\gamma_r = \dim(B_{r-1}) + \beta_r + \dim(B_r)$ . Sean  $\alpha_r = \dim(B_r)$  y  $\alpha(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r t^r$ . Entonces como  $\gamma_r = \alpha_{r-1} + \beta_r + \alpha_r$ , se sigue que  $\gamma(t) = \beta(t) + (1+t)\alpha(t)$ .  $\square$

1.6.2 Corolario. Para todo entero  $k$ , no negativo:

$$a) \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \gamma_r = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \beta_r$$

$$b) \sum_{r=0}^k (-1)^{r+k} \gamma_r \geq \sum_{r=0}^k (-1)^{r+k} \beta_r$$

$$c) \gamma_k \geq \beta_k \text{ para todo } k.$$

Demostración: a) se sigue colocando  $t = -1$  en la ecuación  $\gamma(t) = \beta(t) + (1+t)\alpha(t)$ . b) Se obtiene así: Cuando  $k = 0$ , se coloca  $t = 0$  en  $\gamma(t) = \beta(t) + (1+t)\alpha(t)$ , obteniendo  $\gamma_0 = \beta_0 + \alpha_0$ , y como  $\alpha_0 \geq 0$  entonces  $\gamma_0 \geq \beta_0$ . Cuando  $k \geq 1$  utilizamos  $\gamma_r = \alpha_r + \beta_r + \alpha_{r-1}$ , entonces

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^k (-1)^r \gamma_r &= \sum_{r=1}^k (-1)^r \alpha_r + \sum_{r=1}^k (-1)^r \alpha_{r-1} + \sum_{r=1}^k (-1)^r \beta_r \\ &= \sum_{r=1}^k (-1)^r \alpha_r + \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^{r+1} \alpha_r + \sum_{r=1}^k (-1)^r \beta_r \\ &= (-1)^k \alpha_k - \alpha_0 + \underbrace{\sum_{r=1}^k (-1)^r \beta_r + \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^r \alpha_r + \sum_{r=1}^{k-1} (-1)^{r+1} \alpha_r}_0 \end{aligned}$$

y como  $\gamma_0 = \beta_0 + \alpha_0$  tenemos:

$$\sum_{r=0}^k (-1)^r \gamma_r = \sum_{r=0}^k (-1)^r \beta_r + (-1)^k \alpha_k,$$

multiplicando por  $(-1)^k$  obtenemos

$$\sum_{r=0}^k (-1)^{r+k} \gamma_r = \sum_{r=0}^k (-1)^{r+k} \beta_r + \alpha_k, \text{ y como } \alpha_k \geq 0 \text{ entonces}$$

$$\sum_{r=0}^k (-1)^{r+k} \gamma_r \geq \sum_{r=0}^k (-1)^{r+k} \beta_r.$$

La parte c) se obtiene de la b): Si  $k=0$ , sabemos que  $\gamma_0 \geq \beta_0$ . Ahora por la parte b)

$$\sum_{r=0}^k (-1)^{r+k} \gamma_r + \sum_{r=0}^{k+1} (-1)^{r+k+1} \gamma_r \geq \sum_{r=0}^k (-1)^{r+k} \beta_r + \sum_{r=0}^{k+1} (-1)^{r+k+1} \beta_r$$

y después de simplificar obtenemos:  $\gamma_{k+1} \geq \beta_{k+1}$  para todo  $k$ .  $\square$

Ahora si  $M$  es una variedad diferenciable y  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de Morse con un número finito de puntos críticos, entonces  $M$  tiene el mismo tipo de homotopía de un CW-complejo  $X$ , finito, con una  $\lambda$ -celda abierta por cada punto crítico de índice  $\lambda$ . En este caso cada  $H_p(X^P, X^{P-1})$  es un espacio vectorial de dimensión finita. Sea  $\gamma_p$  el número de puntos críticos de  $f$  de índice  $p$ , entonces por el lema 1.5.9:  $\dim(H_p(X^P, X^{P-1})) = \gamma_p$ .

**1.6.3 Teorema.** (Desigualdades de Morse). Sean  $M$  una variedad diferenciable y  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse con un número finito de puntos críticos. Si  $\gamma_p$  denota el número de puntos críticos de  $f$ , con índice  $p$ , y  $\beta_p = \dim(H_p(M))$  entonces

$$a) \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \gamma_r = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \beta_r$$

$$b) \sum_{r=0}^k (-1)^{r+k} \gamma_r \geq \sum_{r=0}^k (-1)^{r+k} \beta_r$$

$$c) \gamma_k \geq \beta_k$$

Demostración: La observación anterior al Teorema 1.6.3 muestra que  $\gamma_p = \text{dimensión } (H_p(X^P, X^{P-1}))$ . Ahora apliquemos el lema 1.6.1 al complejo de cadenas celulares  $D(X)$  y observemos que por el teorema 1.5.7,  $\beta_p = \text{dimensión } (H_p(D(X))) = \text{dimensión } (H_p(M))$ .  $\square$

Obsérvese que la suma  $\chi(M) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \beta_k$  es un invariante topológico de  $M$ , llamado la característica de Euler de  $M$ . Luego para calcular  $\chi(M)$  podemos utilizar una función de Morse  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ .

6.4 Corolario. Si  $\gamma_{n+1} = \gamma_{n-1} = 0$  para algún  $n \geq 1$ , entonces  $\beta_n = \gamma_n$ .

Demostración: Por la parte c)  $\beta_{n+1} = \beta_{n-1} = 0$ . Utilizemos ahora la parte b), sustituyendo  $k=n$  y  $k=n+1$ . Obtenemos las desigualdades:

$$(-1)^n \gamma_0 + \dots + (-1)^{n+n} \gamma_n \geq (-1)^n \beta_0 + \dots + (-1)^{n+n} \beta_n$$

$$(-1)^{n+1} \gamma_0 + \dots + (-1)^{(n+1)+n} \gamma_n \geq (-1)^{n+1} \beta_0 + \dots + (-1)^{(n+1)+n} \beta_n$$

multiplicando la primera por  $(-1)$  y comparando con la segunda obtenemos:

$$(-1)^n \gamma_0 + \dots + (-1)^{n+n} \gamma_n = (-1)^n \beta_0 + \dots + (-1)^{n+n} \beta_n \quad (*)$$

Si  $n=1$  esta ecuación demuestra el resultado. Si  $n \geq 2$  utilizamos la parte b), sustituyendo  $k=n-1$  y  $k=n-2$ . Con el mismo razonamiento anterior obtenemos:

$$(-1)^n \gamma_0 + \dots + (-1)^{n+(n-2)} \gamma_{n-2} = (-1)^n \beta_0 + \dots + (-1)^{n+(n-2)} \beta_{n-2} \quad (**)$$

y ahora restando las ecuaciones (\*) y (\*\*) se sigue que  $\beta_n = \gamma_n$ .  $\square$



**Ejemplo 1** Este corolario nos permite calcular homología del espacio proyectivo complejo  $\mathbb{C}P^n$  de dimensión  $n$  (no lo discutiremos en detalle, porque aparece en la mayoría de las exposiciones sobre la Teoría de Morse, por ejemplo en [Mil], página 26). Sean  $CS^n$  la esfera compleja de dimensión  $n$ , es decir,  $CS^n = \{(z_1, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2 = 1\}$  y  $\rho$  la siguiente relación de equivalencia en  $CS^n$ : si  $x, y \in CS^n$ , entonces  $x \rho y$  ssi  $x=y$  ó  $x = -y$ . El espacio proyectivo complejo de dimensión  $n$  es el cociente  $CS^n/\rho$ .

Ahora sean  $C_1, C_2, \dots, C_{n+1}$ , números reales distintos y definamos la función  $f: \mathbb{C}P^n \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f([z_1, \dots, z_{n+1}]) = \sum_{i=1}^{n+1} C_i |z_i|^2$ . Esta función es de Morse y tiene  $(n+1)$  puntos críticos:  $P_1, \dots, P_{n+1}$ , de índices  $0, 2, 4, \dots, 2n$ . Luego

$$\gamma_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1, 3, \dots, 2n-1, 2n+1, 2n+2, \dots \\ 1 & \text{si } n = 0, 2, 4, \dots, 2n \end{cases}$$

por lo tanto la homología de  $\mathbb{C}P^n$  es:

$$H_p(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } p = 1, 3, \dots, 2n-1, 2n+1, 2n+2, \dots \\ \mathbb{R} & \text{si } p = 0, 2, 4, \dots, 2n \end{cases}$$

### 1.7. Existencia de Funciones de Morse

Sea  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ , una subvariedad (regular) de  $\mathbb{R}^n$ , de dimensión  $k$ . Es decir,  $M$  es una variedad diferenciable de dimensión  $k$  tal que para todo  $m \in M$  existe un sistema de coordenadas locales  $(U_m, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que:

a)  $U_m \cap M = \{m \in U_m : x^{k+1}(m) = \dots = x^n(m) = 0\}$

b) Las parejas  $(U_m \cap M; \varphi|_{U_m \cap M})$   $m \in M$ , forman un atlas de  $M$ .

Definimos el conjunto  $N = \{(m, V) \in M \times \mathbb{R}^n : V \perp T_m M\}$ , resulta que  $N$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^{2n}$  de dimensión  $n$ , como se demostrará más adelante. Y sea  $E: N \rightarrow \mathbb{R}^n$  la aplicación definida por la fórmula,  $E(m, V) = m + V$ .

**1.7.1 Definición.** Sea  $M$  una subvariedad de  $\mathbb{R}^n$ ,  $m \in M$  y  $e \in \mathbb{R}^n$ . El punto  $e$  es un punto local de  $(M, m)$  de multiplicidad  $\mu$ , si  $e = E(m, V)$  para algún  $V$ , y si la diferencial de  $E$  en  $(m, V)$  tiene nulidad  $\mu > 0$ . El punto  $e \in \mathbb{R}^n$  se llama un punto focal de  $M$  si  $e$  es un punto focal de  $(M, m)$  para algún  $m \in M$ .

Dados  $M, N$  variedades diferenciales y  $\mu: M \rightarrow N$  una función suave diremos que  $m \in M$  es un punto crítico de  $\mu$ , si  $d\mu|_m$  no es sobreyectiva, en caso contrario diremos que es un punto regular (obsérvese que esta definición coincide con la anterior cuando  $N = \mathbb{R}$ ). Un punto  $n \in N$  es un valor regular si no es la imagen de ningún punto crítico (incluso si  $n$  no está en la imagen de  $\mu$ ), en caso contrario se dice que  $n$  es un valor crítico.

**1.7.2 Definición.** Un  $n$ -cubo  $C$ , es un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  de la forma  $C = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$  donde  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ,  $a_i < b_i$ . El volumen de  $C$  se define como  $\text{Vol}(C) = (b_n - a_n) \times \dots \times (b_1 - a_1)$ . Dado  $X \subset \mathbb{R}^n$  decimos que  $X$  tiene medida cero si para todo  $\epsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\epsilon > 0$ , existe una colección de  $n$ -cubos:  $C_1, C_2, \dots$  tales que  $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$  y  $\sum_{i=1}^{\infty} \text{Vol}(C_i) < \epsilon$ .

**1.7.3 Definición.** Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ .  $X \subset M$  tiene medida cero si para todo sistema de coordenadas  $(U, \varphi)$  de  $M$  el conjunto  $\varphi(U \cap X) \subseteq \mathbb{R}^n$  tiene medida cero.

**1.7.4 Teorema.** (Sard) Sean  $M, N$  variedades diferenciables y  $f: M \rightarrow N$  una función suave, entonces el conjunto de valores críticos de  $f$  tiene medida cero ([Hi], página 69).

Puesto que un  $n$ -cubo no tiene medida cero, ([Gui-Pol; Apéndice 1) el complemento de un conjunto de medida cero es denso.

1.7.5 Lema. Con la misma notación que en la definición 1.7.1, el conjunto de puntos  $x \in \mathbb{R}^n$ , tales que  $x$  es un punto focal de  $M$ , tiene medida cero.

Demostración: Recordemos que si la diferencial de  $E$  en un punto tiene nulidad  $\mu > 0$  entonces el punto es crítico. Luego  $X \in \mathbb{R}^n$  es un punto focal ssi  $X$  es un valor crítico de  $E: N \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Pero por el teorema de Sard este conjunto tiene medida cero.  $\square$

Escojamos ahora coordenadas locales para  $N$  en un punto  $(m, V)$  y calculemos la diferencial de  $E$ . Sea  $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$  una carta de  $\mathbb{R}^n$  alrededor de  $m$  y tal que  $U \cap M = \{x \in U: x^{k+1}(x) = \dots = x^n(x) = 0\}$ , entonces  $(U \cap M, \varphi|_{U \cap M})$  es una carta de  $M$  y el conjunto  $\left\{ \frac{\varphi}{\partial x^1} |_x, \dots, \frac{\varphi}{\partial x^k} |_x \right\}$  genera a  $M_x$  para cada  $x \in M \cap U$ . Con la ayuda de la carta  $(U, \varphi)$  y el proceso de Gram-Schmidt, podemos contruir  $n-k$  funciones  $V_1, \dots, V_{n-k}: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  suaves tales que para todo  $i$  y  $x \in U \cap M: V_i(x) \perp M_x, \|V_i(x)\| = 1$  y  $V_i(x) \perp V_j(x)$  para  $i \neq j$ . Si  $V \in \mathbb{R}^n$  tal que  $V \perp M_x$  para algún  $x \in U \cap M$ , entonces  $V = \sum_{i=1}^{n-k} a_i V_i(x)$  para ciertas constantes  $a^i$ .

Ahora  $\varphi^{-1}|\mathbb{R}^k$  es una parametrización de  $U \cap M$  (en realidad  $\varphi^{-1}$  está definido sobre un abierto de  $\mathbb{R}^n$  pero podemos suponer que está definida en todo  $\mathbb{R}^n$ . Por último identificamos  $\mathbb{R}^k$  con  $\mathbb{R}^k_x (0, \dots, 0) \subseteq \mathbb{R}^n$ ). Luego como parametrización de una vecindad de  $(m, V)$  podemos tomar la siguiente aplicación:

$$(t_1, \dots, t_k, a_1, \dots, a_{n-k}) \xrightarrow{\psi} \left( \varphi^{-1}(t_1, \dots, t_k), \sum_{i=1}^{n-k} a_i V_i \left( \varphi^{-1}(t_1, \dots, t_k) \right) \right)$$

Esto demuestra que  $N$  es una variedad de dimensión  $n$ . Escribimos  $\varphi^{-1} = (y^1, \dots, y^n)$  y  $\tilde{V}_i = V_i(y^1, \dots, y^n)$ . Entonces  $\psi$  tiene la forma:

$$(t_1, \dots, t_k, a_1, \dots, a_{n-k}) \rightarrow \left( \vec{y}(t_1, \dots, t_k), \sum_{i=1}^{n-k} a_i \tilde{v}_i(t_1, \dots, t_k) \right)$$

Calculemos la matriz Jacobiana de  $E \circ \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $E \circ \psi(t_1, \dots, t_k, a_1, \dots, a_{n-k}) = \vec{y}(t_1, \dots, t_k) + \sum_{i=1}^{n-k} a_i \tilde{v}_i(t_1, \dots, t_k)$ . Las derivadas parciales que se obtienen son:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E \circ \psi}{\partial t_i} &= \frac{\partial \vec{y}}{\partial t_i} + \sum_{j=1}^{n-k} a_j \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial t_i} \\ \frac{\partial E \circ \psi}{\partial a_i} &= \tilde{v}_i \end{aligned} \right\} \text{ vectores de } \mathbb{R}^n.$$

Luego la matriz Jacobiana  $J$  es:

$$J = \left[ \frac{\partial E \circ \psi}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial E \circ \psi}{\partial t_k}, \frac{\partial E \circ \psi}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial E \circ \psi}{\partial a_{n-k}} \right]$$

1.7.6 Lema. Sea  $(m, V) \in E$ . El punto  $m+V$  es un punto focal de  $(M, m)$  con multiplicidad  $\mu$  ssi la siguiente matriz  $k \times k$  es singular con nulidad  $\mu$ :  $\left( \frac{\partial \vec{y}}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial \vec{y}}{\partial t_j} + \sum_{\alpha=1}^{n-k} a_\alpha \frac{\partial \vec{y}}{\partial t_j} \cdot \frac{\partial \tilde{v}_\alpha}{\partial t_i} \right)_{1 \leq i, j \leq k}$

Demostración: Sea  $A$  la siguiente matriz.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{y}}{\partial t_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \vec{y}}{\partial t_k} \\ \tilde{v}_1 \\ \vdots \\ \tilde{v}_{n-k} \end{bmatrix}$$

La matriz  $A$  es no-singular porque sus vectores fila son linealmente independientes por construcción. Luego la matriz  $AJ$  tiene la misma nulidad que  $J$ , (siendo  $J$  la matriz Jacobiana de  $E \circ \psi$ ). Calculemos

$$AJ = \begin{array}{l} \left( \frac{\partial \vec{y}}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial \vec{y}}{\partial t_j} + \sum_{\alpha=1}^{n-k} a_{\alpha} \frac{\partial \vec{y}}{\partial t_i} \cdot \frac{\partial \tilde{V}_{\alpha}}{\partial t_j} \right)_{1 \leq i, j \leq k} \quad \begin{array}{l} 0_{k \times (n-k)} \\ \\ \\ \end{array} \\ \left( \sum_{\alpha=1}^{n-k} a_{\alpha} \frac{\partial \tilde{V}_{\alpha}}{\partial t_j} \cdot \tilde{V}_i \right)_{\substack{1 \leq i \leq n-k \\ 1 \leq j \leq k}} \quad \begin{array}{l} I_{(n-k) \times (n-k)} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

La matriz de ceros se obtiene porque  $\tilde{V}_i \perp \frac{\partial \vec{y}}{\partial t_{\alpha}}$  y la matriz identidad se obtiene porque  $\|\tilde{V}_i\| = 1$ . Ahora la nulidad de  $AJ$  la determina la matriz superior izquierda porque las últimas  $k$ -filas son linealmente independientes.  $\square$

Consideremos ahora las siguientes funciones. Sean  $M$  una subvariedad de  $\mathbb{R}^n$  y  $p \in \mathbb{R}^n$ . Definimos la función  $L_p: M \rightarrow \mathbb{R}$  por  $L_p(x) = \|p-x\|^2$ .

**1.7.7 Lema.** Sea  $M$  una subvariedad de  $\mathbb{R}^n$  de dimensión  $k$ . El punto  $m \in M$  es un punto crítico degenerado de  $L_p$  ssi  $p$  es un punto focal de  $(M, m)$ . La nulidad de  $m$  como punto crítico es igual a la multiplicidad de  $p$  como punto focal.

*Demostración.* Utilizamos la misma notación que la teoría que sigue al lema 1.7.5. Escribamos  $L_p$  de acuerdo a la parametrización  $(t_1, \dots, t_k) \xrightarrow{\varphi^{-1}} \vec{y}(t_1, \dots, t_k) \in U \cap M$ . Sea  $f = L_p \circ \varphi^{-1} = \|\vec{y}(t_1, \dots, t_k) - p\|^2 = \|\vec{y}(t_1, \dots, t_k)\|^2 + \|p\|^2 - 2 \vec{y}(t_1, \dots, t_k) \cdot p$ ; entonces las derivadas parciales de  $f$  son:

$$\frac{\partial f}{\partial t_i} = 2 \frac{\partial \vec{y}}{\partial t_i} \cdot (\vec{y} - p) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^i \partial t^i} = 2 \left( \frac{\partial^2 \vec{y}}{\partial t^i \partial t^i} \cdot (\vec{y} - p) + \frac{\partial \vec{y}}{\partial t^i} \cdot \frac{\partial \vec{y}}{\partial t^i} \right).$$

Si  $p = \vec{y} + \vec{V}$ , donde  $(\vec{y}, \vec{V}) \in N$ , entonces  $\frac{\partial^2 f}{\partial t^i \partial t^i} = 2 \left( -\frac{\partial^2 \vec{y}}{\partial t^i \partial t^i} \cdot \vec{V} + \frac{\partial \vec{y}}{\partial t^i} \cdot \frac{\partial \vec{y}}{\partial t^i} \right)$ .

Ahora  $\vec{V} = \sum_{\alpha=1}^{n-k} a_{\alpha} \tilde{V}_{\alpha}$  y  $0 = \frac{\partial}{\partial t^i} \left( a_{\alpha} \tilde{V}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{y}}{\partial t^j} \right) = a_{\alpha} \frac{\partial \tilde{V}_{\alpha}}{\partial t^i} \cdot \frac{\partial \vec{y}}{\partial t^j} + a_{\alpha} \tilde{V}_{\alpha} \cdot \frac{\partial^2 \vec{y}}{\partial t^i \partial t^j}$ , y por lo tanto

si sustituimos en  $\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}$  obtenemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^i \partial t^j} = 2 \left( \frac{\partial \vec{y}}{\partial t^i} \cdot \frac{\partial \vec{y}}{\partial t^j} + \sum_{\alpha=1}^{n-k} a_{\alpha} \frac{\partial \tilde{V}_{\alpha}}{\partial t^i} \cdot \frac{\partial \vec{y}}{\partial t^j} \right). \quad \square$$

**1.7.8 Teorema** Sea  $M$  una subvariedad de  $\mathbb{R}^n$ . El conjunto de puntos  $p \in \mathbb{R}^n$  tales que la función  $L_p: M \rightarrow \mathbb{R}$  no es de Morse; tiene medida cero.

*Demostración.*  $L_p$  es una función de Morse ssi cada punto crítico de  $L_p$  es no degenerado, pero por el lema 1.7.7 esto es equivalente a que  $p$  no sea un punto focal de  $M$ , y por el lema 1.7.5 el conjunto de puntos focales de  $m$  tiene medida cero.  $\square$

**1.7.9 Corolario** (Existencia de Funciones de Morse). En toda variedad diferenciable  $M$  existe una función de Morse  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $M^a = f^{-1}(-\infty, a]$  es compacto para todo  $a \in \mathbb{R}$ .

*Demostración:* Por un teorema de Whitney, toda variedad diferenciable de dimensión  $n$ , es difeomorfa a una subvariedad (regular) de  $\mathbb{R}^{2n+1}$   $([An-Ma])$ .  $\square$

Ejemplos de funciones de Morse  $f: M \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se pueden dar muchos, incluso lineales, pero no siempre  $M^a$  es compacto. También se puede demostrar que las funciones de Morse forman un subconjunto denso y abierto en el conjunto de funciones suaves de  $M$  en  $\mathbb{R}$ , con la topología fuerte ([Hir] página 147).

La sola existencia de una función de Morse sobre una variedad diferenciable, conexa y de dimensión 1, permite demostrar que esta es difeomorfa a  $\mathbb{R}$  ó  $S$  ([Gui-Po]; Apéndice II).

1.7.10 Corolario. Una variedad diferenciables tiene el mismo tipo de homotopía que un CW-complejo.

## CAPITULO 2

## LA TEORIA DE WITTEN

En este capítulo exponemos otra demostración de las desigualdades de Morse. Basada en una idea de Witten ([Witt]).

## 2.1. Los teoremas de De Rham y Hodge

2.1.1 Definición. Un complejo de cocadenas  $C^*$  es una familia  $\{C^p, d_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  de espacios vectoriales  $C^p$  sobre  $\mathbb{R}$  y de homomorfismos  $d_p: C^p \rightarrow C^{p+1}$  tales que  $d_{p+1} \circ d_p = 0$ . El  $p$ -ésimo módulo de Cohomología  $H^p(C^*)$  de  $C^*$  se define como el cociente:  $H^p(C^*) = \text{Kernel}(d_p) / \text{Imágen}(d_{p-1})$ . Definimos  $C^{-1} \equiv 0$ .

Sean  $M$  una variedad diferenciable, y  $d$  la derivación exterior sobre formas diferenciables. Para cada entero  $p$  no negativo, sea  $E^p(M) = \{p\text{-formas diferenciables sobre } M\}$ . Es un hecho bien conocido en Geometría Diferencial, que la familia  $C^*(M) = \{E^p(M), d\}$  es un complejo de cocadenas.

2.1.2 Definición. Sean  $M$  una variedad diferenciable y  $C^*(M)$  como en el párrafo anterior. Definimos el  $p$ -ésimo módulo de cohomología de De Rham sobre  $M$ , como:  $H^p_{\text{de Rham}}(M) = H^p(C^*(M))$ .

El siguiente teorema es una consecuencia del clásico teorema de De-Rham. Para la demostración del Teorema de De-Rham en general y sus consecuencias, ver el libro de Warner ([War]; capítulo cinco).



2.1.3 Teorema ([War]; página 205) Sea  $M$  una variedad diferenciable compacta. Para cada entero  $p$  no negativo:

$H^p_{\text{de-Rham}}(M)$  es isomorfo al espacio dual de  $H_p(M)$  (recordemos que  $H_p(M)$  es el  $p$ -ésimo módulo de homología singular de  $M$ ).

Ahora nos ocuparemos de la teoría necesaria para enunciar una consecuencia del teorema de Hodge (para el Teorema de Hodge en general véase el libro de Warner, capítulo seis).

2.1.4 Definición. (Producto interno en  $\Lambda(V)$ ). Sean  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  y  $\langle , \rangle$  un producto interno en  $V$ . Sea  $\Lambda(V)$  el álgebra exterior de  $V$  con producto exterior " $\wedge$ " ([War]; página 56) y extendamos el producto interno  $\langle , \rangle$  a todo  $\Lambda(V)$  así: el producto interno entre dos elementos homogéneos de diferentes grados, como igual a cero, y para dos elementos homogéneos  $W_1, \dots, W_r$  y  $V_1, \dots, V_r$  del mismo grado definimos  $\langle W_1 \wedge \dots \wedge W_r, V_1 \wedge \dots \wedge V_r \rangle = \text{determinante}(\langle W_i, V_j \rangle)$ . Después lo extendemos por bilinealidad a todo  $\Lambda(V)$ .

2.1.5. Definición. (Orientación de un espacio vectorial). Sean  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$  de dimensión  $n$  y  $\Lambda_k(V)$  el subespacio de  $\Lambda(V)$ , generado por todos los elementos homogéneos de orden  $k$ , para  $k$  un entero no negativo. Es bien conocido que  $\Lambda_n(V)$  tiene dimensión uno, una orientación de  $V$  es la escogencia de una de las dos componentes de  $\Lambda_n(V)$  (si  $e$  es una base de  $\Lambda_n(V)$ , entonces las componentes de  $\Lambda_n(V)$  son los dos conjuntos:  $\{te : t \in \mathbb{R}, t > 0\}$ ,  $\{te : t \in \mathbb{R}, t < 0\}$ ). Se dice que  $V$  está orientado, si hemos escogido una de las dos componentes.

2.1.6 Definición. (Operador "estrella" de Hodge). Sea  $V$  un espacio vectorial orientado de dimensión  $n$  con producto interno  $\langle , \rangle$ . Definimos el operador "estrella" de Hodge  $*$ :  $\Lambda(V) \rightarrow \Lambda(V)$  de la

siguiente forma: Si  $e_1, \dots, e_n$  es una base ortonormal de  $V$ , entonces:

$$*(1) = \pm e_1 \wedge \dots \wedge e_n, \quad *(e_1 \wedge \dots \wedge e_n) = \pm 1,$$

$*(e_1 \wedge \dots \wedge e_r) = \pm e_{r+1} \wedge \dots \wedge e_n$ , donde se toma el signo (+) si  $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$  está en la componente de  $\Lambda_n(V)$  que se tomó como orientación. Se toma (-) en caso contrario. Después extendemos  $*$  a todo  $\Lambda(V)$  linealmente. Se puede demostrar que  $*$  queda bien definido y no es difícil demostrar estas propiedades:

a)  $* \Lambda_p(V) \rightarrow \Lambda_{n-p}(V)$

b)  $** = (-1)^{p(n-p)}$

c)  $\langle V, W \rangle = *(W \wedge *V) = *(V \wedge *W)$  para todo  $V, W \in \Lambda_p(V)$ , donde  $\langle , \rangle$  es el producto interno como se define en 2.1.4.

Ahora definiremos el operador de Laplace-Beltrami ó Laplaciano, que generaliza a variedades el Laplaciano de  $\mathbb{R}^n$ . Pero antes daremos una definición de orientación de una variedad.

2.1.7. Definición. (Orientación de una variedad). Sea  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ .

Se dice que  $M$  es orientable, si existe una  $n$ -forma diferencial  $w$  sobre  $M$  que nunca se anula.

Una orientación de  $M$  es la escogencia de uno de los dos conjuntos:  $\bigcup_{m \in M} \{aw(m): a \in \mathbb{R}, a > 0\}$ ,

$$\bigcup_{m \in M} \{aw(m): a \in \mathbb{R}, a < 0\}.$$

A partir de esta definición es claro como una orientación de  $M$  induce una orientación en cada

$$\Lambda_n(M^*_m) \text{ para } m \in M.$$

Nota. En lo que resta de este capítulo, todas nuestras variedades serán compactas, orientables y con una estructura de Riemann.

2.1.8. Definición (Operador de Laplace-Beltrami o Laplaciano). Utilizaremos como orientación de cada  $\Lambda_n(M_m^*)$  la inducida por la orientación de  $M$  y como producto interno en  $M_m^*$  el inducido por la estructura de Riemann  $\langle , \rangle$  de  $M$ . Para  $p$  un entero positivo, definimos  $\delta: E^p(M) \rightarrow E^{p-1}(M)$  por  $\delta = (-1)^{n(p+1)+1} *d*$ . Si  $p = 0$  entonces  $\delta$  es el operador idénticamente cero.

El Laplaciano  $\Delta$  es un operador lineal sobre  $E^p(M)$  para cada entero  $0 \leq p \leq n$ , definido por  $\Delta = \delta d + d\delta$  y lo extendemos a  $E(M) = \sum_{k=0}^n E^k(M)$  de la forma natural.

Definiremos ahora un producto interno  $\langle , \rangle$  en el espacio vectorial  $E(M)$ .

2.1.9. Definición (Producto interno de  $E(M)$ ). Sean  $M$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ .

Para cada  $p$ ,  $0 \leq p \leq n$ , definimos un producto interno  $\langle , \rangle$  en  $E^p(M)$  así: Si  $\alpha, \beta \in E^p(M)$ , entonces  $\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M \alpha \wedge * \beta$ . Extendemos  $\langle , \rangle$  a todo  $E(M)$ , haciendo los diferentes  $E^p(M)$  ortogonales entre sí. Utilizando las propiedades del operador estrella, no es difícil probar que  $\langle , \rangle$  es una forma bilineal simétrica definida positiva.

2.1.10 Lema Sea  $M$  una variedad diferenciable. El operador  $\delta$  es el adjunto de  $d$  en  $E(M)$ . Es decir:

$$\langle \alpha, d\beta \rangle = \langle \delta\alpha, \beta \rangle \text{ para todo } \alpha, \beta \in E(M), \text{ donde } \langle , \rangle \text{ es como en 2.1.9.}$$

La demostración de este lema es una consecuencia sencilla del teorema de Stokes para variedades ([War], página 221).

Ahora el Teorema de Descomposición de Hodge ([War]; Capítulo 6) afirma que  $E^p(M)$  es una suma directa de  $\Delta(E^p)$  y las  $p$ -formas armónicas de  $\Delta$  es decir, aquellas  $W \in E^p(M)$ , tales que  $\Delta W = 0$ . Como consecuencia de este teorema tenemos: